Matematik 5 svar

Kapitel 3

3101. a) $y'(x) = -2x \Rightarrow y(x) = -x^2 + C$

b) $y'(x) = x^2 - x + 1 \Rightarrow y(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$

c) $y' - x^2 + 2 = 0 \Rightarrow y' = x^2 - 2 \Rightarrow y(x) = \frac{x^3}{3} - 2x + C$

d) $\frac{1}{2}y' - x + x^3 = 1 \Rightarrow y' = 2x - 2x^3 + 2 \Rightarrow y(x) = x^2 - \frac{x^4}{2} + 2x + C$

e) $y'(x) = \frac{4}{e^{2x}} = 4e^{-2x} \Rightarrow y(x) = -2e^{-2x} + C = -\frac{2}{e^{2x}} + C$

f) $y'(x) = 2\cos\frac{x}{2} \Rightarrow y(x) = 4\sin\frac{x}{2} + C$

3102. a) $y''(x) = -3x + 1 \Rightarrow y'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + C \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{x^2}{2} + Cx + D$

b) $y''(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = C \Rightarrow y(x) = Cx + D$

c) $y''(x) = 8e^{2x} \Rightarrow y'(x) = 4e^{2x} + C \Rightarrow y(x) = 2e^{2x} + Cx + D$

d) $y''(x) = -4\sin x \Rightarrow y'(x) = 4\cos x + C \Rightarrow y(x) = 4\sin x + Cx + D$

e) $y''(x) = 18\sqrt{x} = 18x^{1/2} \Rightarrow y'(x) = 12\,x^{3/2} + C \Rightarrow y(x) = \frac{24}{5}\,x^{5/2} + Cx + D$

f) $y''(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow y'(x) = -\frac{1}{x} + C \Rightarrow y(x) = -\ln|x| + Cx + D$

3103. a) $\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow y(x) = x^2 + C$

b) $\frac{dy}{dx} = 4 \cdot e^{2x} \Rightarrow y(x) = 2 \cdot e^{2x} + C$

c) $\frac{dy}{dt} = \frac{2}{t} \Rightarrow y(t) = 2\ln|t| + C$

d) $\frac{dy}{dt} = 4\sin 2t \Rightarrow y(x) = -2\cos 2t + C$

3104. a) $y'(x) = 2 \Rightarrow y(x) = 2x + C$ och $y(3) = 10 \Rightarrow y(x) = 2x + 4$

b) $y'(x) = 4x + 3 \Rightarrow y(x) = 2x^2 + 3x + C$ och $y(1) = 10 \Rightarrow y(x) = 2x^2 + 3x + 5$

c) $y'(x) = e^x + 1 \Rightarrow y(x) = e^x + x + C$ och $y(1) = e \Rightarrow y(x) = e^x + x - 1$

d) $y'(x) = \cos x - \sin x \Rightarrow y(x) = \sin x + \cos x + C$ och $y(0) = 1$

$$\Rightarrow y(x) = \sin x + \cos x$$

e) $y''(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = C \Rightarrow y(x) = Cx + D$ och $y(0) = 3, y(1) = 5$

$$\Rightarrow y(x) = 2x + 3$$

f) $y''(x) = 2 \Rightarrow y'(x) = 2x + C \Rightarrow y(x) = x^2 + Cx + D$ och $y(0) = 1, y'(3) = 4$

$$\Rightarrow y(x) = x^2 - 2x + 1$$

3105. $y(x) = 1 + \cos x \Rightarrow y'(x) = -\sin x$

$$y'\cos x + y\sin x = -\sin x\cos x + (1 + \cos x)\sin x = \sin x \text{ VSV}$$

3106. $y(x) = x - 1 + Ce^{-x} \Rightarrow y'(x) = 1 - Ce^{-x}$

$$x - y = x - (x - 1 + Ce^{-x}) = 1 - Ce^{-x} = y'(x)$$

3107. $y'(x) = 2x + 1 \Rightarrow y(x) = x^2 + x + C$ men $y(2) = 1 \Rightarrow y(x) = x^2 + x - 5$

3108. $y'(x) = 2e^x \Rightarrow y(x) = 2e^x + C$ men $y(1) = 2 = 2e + C = 2e + 2 - 2e \Rightarrow$

$$y(x) = 2e^x - 2e + 2$$

3110. $y'(x) = \sin x \Rightarrow y(x) = -\cos x + C, y(2\pi) = C - \cos 2\pi = 4 \Rightarrow C = 5$

Svar: $y(x) = 5 - \cos x$

3111.

$$y'(x) = 2e^x + e^{x/2} \Rightarrow y(x) = 2e^x + 2e^{x/2} + C$$

$$y(2) - y(1) = 2e^2 + 2e + C - 2e - 2\sqrt{e} - C -= 2e^2 - 2\sqrt{e}$$

3112. a) $y'(x)\sqrt{x} + 1 = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow y(x) = -2\sqrt{x} + C, y(4) = 0 \Rightarrow C = 4$
Svar: $y(x) = 4 - 2\sqrt{x}$

b) $y'(x)e^{2x} = 4 \Rightarrow y'(x) = 4e^{-2x} \Rightarrow y(x) = -2e^{-2x} + C, y(0) = 0 \Rightarrow C = 2$

Svar: $y(x) = 2 - 2e^{-2x}$

c) $y''(x) = 12x^2 + 8 \Rightarrow y'(x) = 4x^3 + 8x + C_1 \Rightarrow y(x) = x^4 + 4x^2 + C_1x + C_2$

$$\begin{cases} 2 = C_2 \\ 10 = 1 + 4 + C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 2 \\ C_1 = 3 \end{cases}$$

Svar: $y(x) = x^4 + 4x^2 + 3x + 2$

d) $y''(x) = x^{-2} \Rightarrow y'(x) = -x^{-1} + C_1, y'(1) = -1 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow y'(x) = -x^{-1}$

$$y(x) = -\ln x + C_2, y(1) = 4 \Rightarrow C_2 = 4$$

Svar: $y(x) = 4 - \ln x$

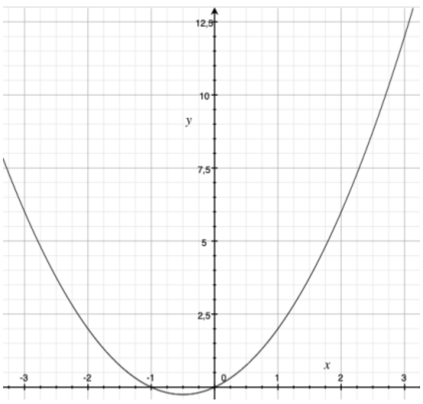
3113. $y(x) = 2x + 3 \Rightarrow y'(x) = 2, y(0) = 3$

3114. $y(x) = x^3 + 3x + 7 \Rightarrow y'(x) = 3x^2 + 3 \Rightarrow y''(x) = 6x = f(x)$

3115. a) $y'(x) = 2x + 1 \Rightarrow y(x) = x^2 + x + C$ vidare gäller

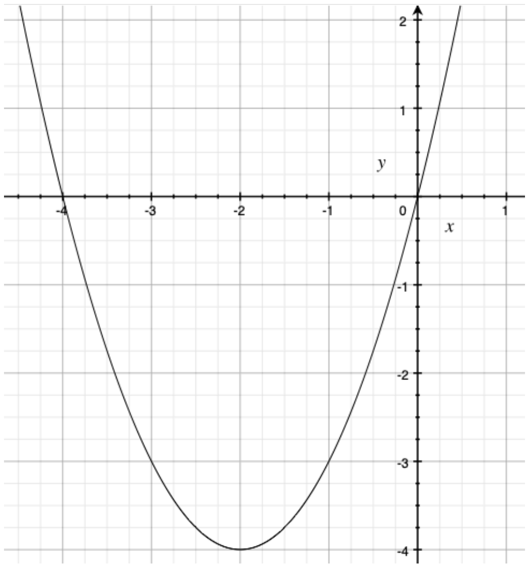
$$2 = 1^2 + 1 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y(x) = x^2 + x$$

b)



3116. $y(0) = 0$ och $y'(0) = 4$

$$y''(x) = 2 \Rightarrow y'(x) = 2x + A = 2x + 4 \Rightarrow y(x) = x^2 + 4x + B = x^2 + 4x$$



3201. a) $y'(x) + 3y(x) = 0 \Rightarrow y(x) = Ce^{-3x}$

b) $y'(x) - 5y(x) = 0 \Rightarrow y(x) = Ce^{5x}$

c) $y'(x) + \frac{y}{3} = 0 \Rightarrow y(x) = Ce^{-x/3}$

d) $2y'(x) + 10y(x) = 0 \Rightarrow y'(x) + 5y(x) = 0 \Rightarrow y(x) = Ce^{-5x}$

3202. a) $y'(x) - 3y(x) = 0 \Rightarrow y(x) = Ce^{3x},\ y(0) = 10 \Rightarrow y(x) = e^{3x}$

b) $y'(x) + 1.8y(x) = 0 \Rightarrow y(x) = Ce^{-1.8x},\ y(0) = -2 \Rightarrow y(x) = -2e^{-1.8x}$

c) $2y'(x) + 6y(x) = 0 \Rightarrow y'(x) + 3y(x) = 0 \Rightarrow y(x) = Ce^{-3x}, y(1) = 3 \Rightarrow$

$$y(1) = Ce^{-3} = 3 \Rightarrow C = 3e^3 \Rightarrow y(x) = 3e^3e^{-3x} = 3e^{3-3x}$$

d) $1.2y(x) = 0.8y'(x) \Rightarrow 0.8y'(x) - 1.2y(x) = 0 \Rightarrow y'(x) - 1.5y(x) = 0 \Rightarrow$

$$y(x) = Ce^{1.5x}, y(1) = e \Rightarrow Ce^{1.5} = e \Rightarrow y(x) = e^{1.5x-0.5}$$

3203. $y'(x) + 3y(x) = 0 \Rightarrow y(x) = Ce^{-3x}, y(0) = 2 \Rightarrow y(x) = 2e^{-3x}$

. $y'(x) = -6e^{-3x} \Rightarrow y'(0) = -6$

3204. a)

$$N'(t) = 0.9N(t) \Rightarrow N(t) = Ce^{0.9t}$$

b) $N(0) = 2 \Rightarrow N(t) = 2e^{0.9t}$

c)) $N(5) = 10 \Rightarrow 10 = Ce^{0.9\cdot 5} \Rightarrow C = 10 \cdot e^{-4.5} \Rightarrow\ N(t) = 10 \cdot e^{-4.5}e^{0.9t} = 10 \cdot e^{0.9t-4.5}$

3205. a) $y(x) = Ce^{-2x} = \{y(0) = 4\} = 4e^{-2x}$

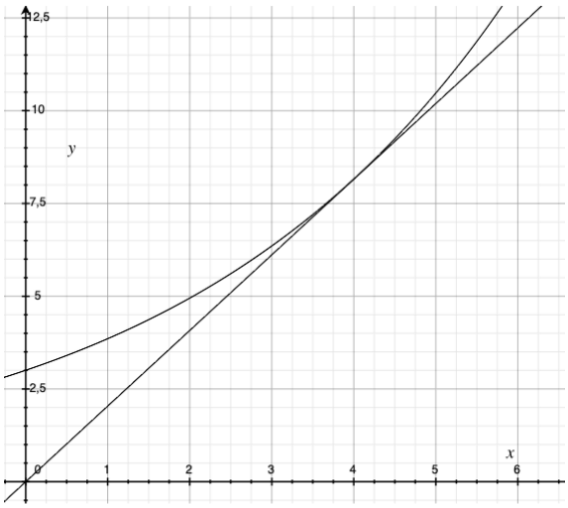
$$y'(x) = -8e^{-2x} \Rightarrow y'(0) = -8$$

b) $y'(-1) = -8e^2$

3206. a) $y(x) = 4y'(x) \Rightarrow y(x) = Ce^{\frac{x}{4}}$ och $y(0) = 3 \Rightarrow y(x) = 3e^{\frac{x}{4}}\, och\; y'(x) = \frac{3}{4}e^{\frac{x}{4}}$

$$y'(0) = k = \frac{3}{4}$$

b) Använd enpunktsformel: $y - 3 \cdot e = \frac{3}{4} \cdot e(x-4) = \frac{3}{4}e \cdot x - 3e \Rightarrow y = \frac{3}{4}e \cdot x$



3207.

$$y(x) = 2e^{-3x} xy'(x) = -6e^{-3x}$$

Ekvationen kan till exempel vara: $y'(x) = -3y(x), y(0) = 2$

3208.

$$y'(x) = \frac{1}{5}y(x) \Rightarrow y(x) = Ce^{x/5}, y(0) = 2 \Rightarrow y(x) = 2e^{x/5}$$

3209.

$$4f'(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = Ce^{\frac{x}{4}}, f(0) = 2 \Rightarrow f(x) = 2e^{\frac{x}{4}}$$

3210.

$$2y'(x) + 3y(x) = 0 \Rightarrow y'(x) + \frac{3}{2}y(x) = 0 \Rightarrow y(x) = K \cdot e^{-\frac{3x}{2}}$$

Dvs bara kurva A och kurva C kan vara lösningar. I fallet C gäller $K < 0$.

3211. Tangentens lutning kan med hjälp av derivatans definition skrivas:

$$f'(x) = \frac{f(x) - 0}{x - (x - 4)} = \frac{f(x)}{4} \Rightarrow f'(x) - \frac{f(x)}{4} = 0 \Rightarrow f(x) = Ce^{\frac{x}{4}}$$

3212. a)

$$\frac{dN}{dt} = kN \text{ dvs } N(t) = N_0 e^{kt}$$

b) $N(t) = N_0 e^{0.54t}$

c) $e^{0.54t} = 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0.54} \approx 1.3$ h

3213. a) $\frac{dN}{dt} = N(t) \Rightarrow N(t) = 180 \cdot e^{2.07t}$

b) $t = \frac{1}{2.07} \ln \frac{1000}{180} \approx 50$ min

c) då antalet organismer är många i förhållande till kärlets storlek

3216. a) $\frac{dK}{dt} = -6.93 \cdot 10^{-3} K \Rightarrow K(t) = 0.2e^{-6.93 \cdot 10^{-3} t}$ M

b) $K(400) = 0.2e^{-6.93 \cdot 10^{-3} \cdot 400}$ M ≈ 0.0125 M

3217.

$$\frac{dy}{dt} = -0.012 \cdot y \Rightarrow y(t) = 4.8e^{-0.012t}$$

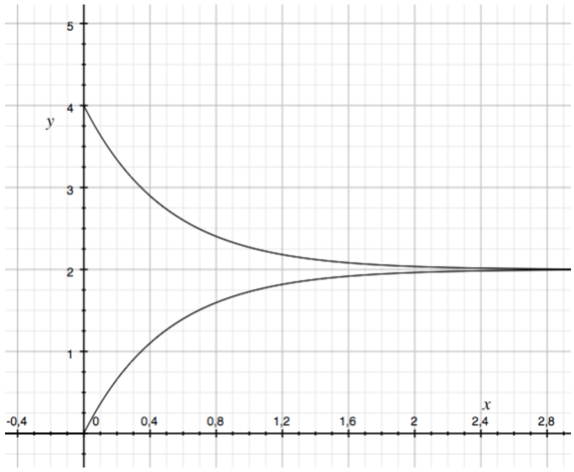
3304.a) $y'(0) = 1 - 2 \cdot \sqrt{0} = 1$

b) $y'(1) = 1 - (-2) \cdot \sqrt{1} = 3$

3306.
b) $v(t) = 2 - 2e^{-2t}, v'(t) = 4e^{-2t}, v(0) = 0$ sätt in i ursprunglig ekvation:

$$4e^{-2t} = 4 - 2(2 - 2e^{-2t}) = 4 - 4 + 4e^{-2t} = 4e^{-2t}$$

c) Om $v(0) = 4$ fås $v(t) = 2e^{-2t} + 2,$



3307. b)

$$y(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow y'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ och } -\frac{y}{x} = -\frac{\frac{1}{x}}{x} = -\frac{1}{x^2} = y'(x) \text{ VSV}$$

3309. a) $y(x) = x^2$

b) $y(x) = C \cdot x^2$

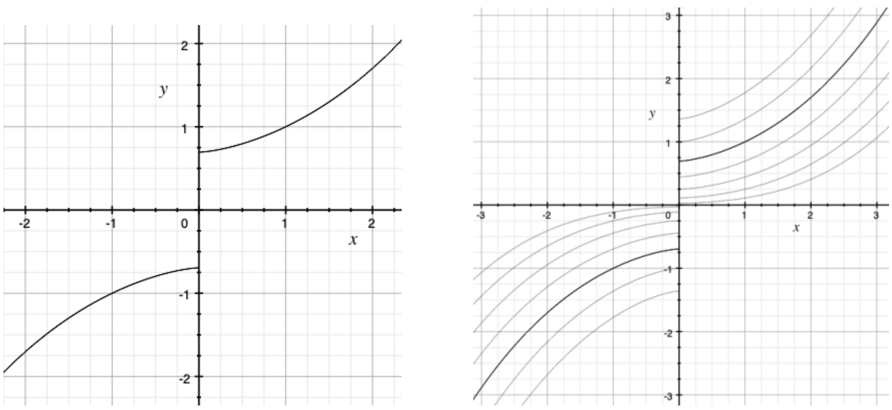
3310.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{x \cdot y} = \frac{1}{2}x^{0.5} \cdot y^{0.5} \Rightarrow 2y^{-0.5}dy = x^{0.5}dx \Rightarrow$$

$$2 \cdot 2y^{0.5} = \frac{2}{3}x^{1.5} + C \Rightarrow y^{0.5} = \frac{1}{6}x^{1.5} + C_1 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{6}x^{1.5} + C_1\right)^2$$

Punkten $(1, 1)$ ger $C_1 = \frac{5}{6}$ dvs:

$$y = \left(\frac{1}{6}|x|^{1.5} + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}(|x|^{1.5} + 5)^2$$



Kurvan i uppgiften och några till i samma familj.

3401. $y_{n+1} = y_n + h \cdot y'_n$

$$y(1.5) = y(1) + 0.5 \cdot 3 = 2 + 1.5 = 3.5$$

3402. $y' = 1 + x^2 y$

x	y	y'=1+x*x*y
0,00	-2,00	1,00
0,40	-1,60	0,74
0,80	-1,30	0,17
1,20	-1,24	-0,78

3406. Använd excel till att stega med $h = -0.1$ eller gör en analytisk lösning.

$$y' = \ln x^2 = 2\ln x \Rightarrow y(x) = 2(x\ln x - x) + C$$

$$y(2) = 0 = 2(2\ln 2 - 2) + C = 0 \Rightarrow C = 4 - 4\ln 2$$

$$y(x) = 2(x\ln x - x) + 4 - 4\ln 2$$

$$y(1.7) \approx -0.368$$

Avsnitt 3.5 Den logistiska tillväxtekvationen och dess lösning.

$$y' = ky(M-y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = ky(M-y) \Leftrightarrow dy = dxky(M-y) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{ky(M-y)} = dx \Leftrightarrow dy\frac{1}{Mk}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{M-y}\right) = dx \Rightarrow \{\text{integrera båda sidor}\}$$

$$\frac{1}{Mk}\big(\ln(y)-\ln(M-y)\big) = x + C_0 \Leftrightarrow \ln\frac{y}{M-y} = Mkx + C_1$$

$$\frac{y}{M-y} = C_2e^{Mkx} \Leftrightarrow y = (M-y)C_2e^{Mkx} \Leftrightarrow y(x) = \frac{Me^{Mkx}}{C+e^{Mkx}}$$

3501. a)

$$y' = 0.0625y(150-y)$$

b)

$$y' = 0.0625y(150-y) = 0.0625\cdot 30\cdot(150-30) = 225 \text{ individer/vecka}$$

c) 120 individer

3502. $y' = 0.01y(120-y)$

a) 120 individer

b) När populationen nåt halva max-värdet dvs 60 individer.

c) $32 = 0.01y(120-y) \Rightarrow y^2 - 120y + 3200 = 0 \Rightarrow y = 60 \pm \sqrt{60^2-3200} = \begin{cases} y_1 = 40 \\ y_2 = 80 \end{cases}$

3503. $y' = 0.004y(500 - y)$

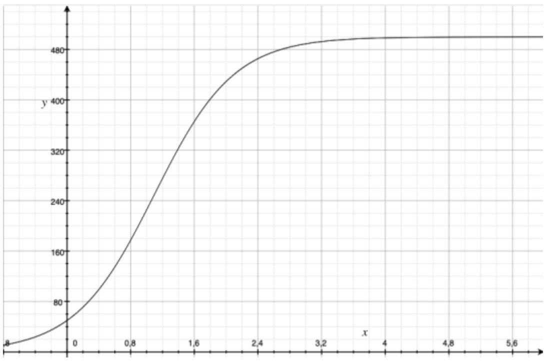
a) 500 individer

b) $y'(100) = y'(400) = 0.004 \cdot 100(500 - 100) = 160$ individer/h

c) Halva max-populationen dvs 250 st.

d)

$$y(t) = \frac{500e^{2t}}{9 + e^{2t}}$$



3504. a) $y' = ky(1800 - y) \Rightarrow 10 = k \cdot 200(1800 - 200) \Rightarrow k = 3.125 \cdot 10^{-5}$/vecka

b) $y' = 3.125 \cdot 10^{-5} y(1800 - y)$

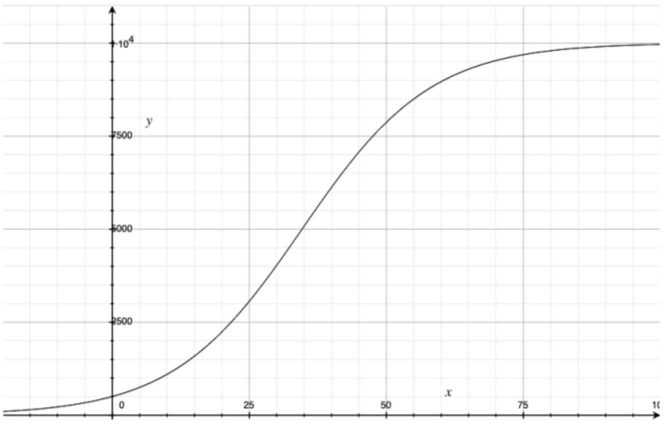
c) $y(t) = \frac{1800e^{0.056t}}{8+e^{0.056t}} \Rightarrow y(52) = \frac{1800e^{0.056\cdot 52}}{8+e^{0.056\cdot 52}} \approx 1270$ individer

3505. a) $y' = 8.5 \cdot 10^{-6} y(t)\big(10000 - y(t)\big), y(0) = 500$ st

b) WolframAlpha ger $y(x) = \frac{10000e^{0.085x}}{19+e^{0.085x}} \Rightarrow y(50) \approx 7870$ st

c) $y(x) = \frac{10000e^{0.085x}}{19+e^{0.085x}} = 0.9 \cdot 10000 \Rightarrow x \approx 60$ år

d) $y'(10) = 8.5 \cdot 10^{-6} y(10)\big(10000 - y(10)\big) \approx 83$ st/år



3507. a) $y' = 4 \cdot 10^{-6} y(t)\big(8000 - y(t)\big)$

b) Max tillväxt fås då $y = 4000 \Rightarrow y'(4000) = 64$ fiskar/vecka

c) $y(t) = \frac{8000e^{0.032t}}{79+e^{0.032t}} \Rightarrow y(52) \approx 500$ fiskar

3508. a) $N'(t) = 4.5 \cdot 10^{-4} N(t)\big(400 - N(t)\big)$

b) Max tillväxt fås vid halva maxpopulationen $N(t) = 200$

c) $40 = \frac{400e^{0.18t}}{19+e^{0.18t}} \Rightarrow 40(19 + e^{0.18t}) = 400e^{0.18t} \Rightarrow 19 + e^{0.18t} = 10e^{0.18t} \Rightarrow t \approx$ 4 månader

3509. a) $y' = 0.007y(t)\big(200 - y(t)\big), y(0) = 30$ st

b) WolframAlpha ger:

$$y(x) = \frac{200e^{1.4x}}{5.67 + e^{1.4x}}$$

d)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{200e^{1.4x}}{5.67 + e^{1.4x}} = 200$$

3510. $y(0) = 65, y(1) = 98$ och $y(2) = 142$

$$y' = ky(M - y)$$

Lösningen är av formen: $y(x) = \frac{Me^{ax}}{b+e^{ax}}$

Med WolframAlpha:
solve m/(b+1)=65 and mexp(a)/(b+exp(a))=98 and mexp(2a)/(b+exp(2a))=142

får man direkt $a = \ln\left(\frac{213}{130}\right), b = \frac{7029}{1105}$ och $M = \frac{8134}{17} \approx 478$ individer:

$$y(x) \approx \frac{478e^{x\ln\frac{213}{130}}}{6.4 + e^{x\ln\frac{213}{130}}}$$

För att hitta k, $\frac{d}{dy}\frac{Me^{ax}}{b+e^{ax}} = k\frac{Me^{ax}}{b+e^{ax}}\left(M - \frac{Me^{ax}}{b+e^{ax}}\right)$

$$\frac{d}{dy}(Me^{ax}(b + e^{ax})^{-1}) = k\frac{Me^{ax}}{b + e^{ax}}\left(M - \frac{Me^{ax}}{b + e^{ax}}\right)$$

$$M(ae^{ax}(b + e^{ax})^{-1} - e^{ax}ae^{ax}(b + e^{ax})^{-2}) = k\frac{Me^{ax}}{b + e^{ax}}\left(M - \frac{Me^{ax}}{b + e^{ax}}\right)$$

$$\frac{ae^{ax}}{b + e^{ax}}\left(1 - \frac{e^{ax}}{b + e^{ax}}\right) = k\frac{Me^{ax}}{b + e^{ax}}\left(1 - \frac{e^{ax}}{b + e^{ax}}\right) \Rightarrow$$

$$k = \frac{a}{M} = \frac{17}{8134}\ln\left(\frac{213}{130}\right) \approx 0.001\ (\text{individ} \cdot \text{år})^{-1}$$

Har man inte tillgång till WolframAlpha:

$$\begin{cases} 65 = \dfrac{M}{b + 1} \\ 98 = \dfrac{Me^{ax}}{b + e^{ax}} \\ 142 = \dfrac{Me^{2ax}}{b + e^{2ax}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 65b + 65 = M \\ 98b + 98e^{ax} = Me^{ax} \\ 142b + 142e^{2ax} = Me^{2ax} \end{cases} \quad b = \frac{1}{65}(M - 65)$$

$$\begin{cases} 98b = e^{ax}(M - 98) \\ 142b = e^{2ax}(M - 142) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{98}{65}(M - 65) = e^{ax}(M - 98) \\ \dfrac{142}{65}(M - 65) = e^{2ax}(M - 142) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{98^2}{65^2}\frac{(M-65)^2}{(M-98)^2} = \frac{142}{65}\frac{M-65}{M-142} \Rightarrow 98^2(M-65)(M-142) = 142\cdot 65\ (M-98)^2$$

$$98^2(M^2-207M+65\cdot 142) = 142\cdot 65\ (M^2-196M+98^2)$$

$$98^2M^2-98^2\cdot 207M+98^2\cdot 65\cdot 142$$
$$= 142\cdot 65\ \cdot M^2-142\cdot 65\ \cdot 196M+98^2\cdot 142\cdot 65$$

$$98^2M^2-98^2\cdot 207M = 142\cdot 65\ \cdot M^2-142\cdot 65\ \cdot 196M$$

$$374M^2 = 178948M \Rightarrow M = \frac{8134}{17} \text{ och } b = \frac{7029}{1105}$$

$$98b = e^a(M-98) \Rightarrow e^a = \frac{98\cdot 7029}{1105}\frac{1}{\frac{8134}{17}-98} = \frac{98\cdot 7029}{1105}\frac{17}{6468} = \frac{7029}{65\cdot 66} \Rightarrow$$

$$a = \ln\frac{213}{130}$$

b)

$$y(x) \approx \frac{478e^{x\ln\frac{213}{130}}}{6.4+e^{x\ln\frac{213}{130}}} = 300 \Rightarrow 178e^{x\ln\frac{213}{130}} = 300\cdot 6.4 \Rightarrow x \approx 4.8 \text{ år} = 4 \text{ år och } 10 \text{ mån}$$

c)

$$y(x_{\text{maxtillv}}) = \frac{478e^{x\ln\frac{213}{130}}}{6.4+e^{x\ln\frac{213}{130}}} = \frac{478}{2} \Rightarrow \frac{e^{x\ln\frac{213}{130}}}{6.4+e^{x\ln\frac{213}{130}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{x\ln\frac{213}{130}} = 6.4 \Rightarrow$$

$x \approx$3 år och 9 månader

$$y'(x_{\text{maxtillv}}) = k\cdot\left(\frac{M}{2}\right)^2 = \frac{17}{8134}\ln\left(\frac{213}{130}\right)\cdot\left(\frac{478}{2}\right)^2 \approx 59 \text{ individer/år}$$

3601. a)

$$(r^2-2r-3)e^{rx} = (r+1)(r-3)e^{rx} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 3 \end{cases}$$

b)

$$(r^2+12r+35)e^{rx} = (r+5)(r+7)e^{rx} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = -7 \\ r_2 = -5 \end{cases}$$

c)

$$(r^2+8r+16)e^{rx} = (r+4)^2e^{rx} = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = -4$$

d)

$$(r^2-25)e^{rx} = (r+5)(r-5)e^{rx} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = -5 \\ r_2 = 5 \end{cases}$$

3602. a)

$$r^2 + 4r - 5 = (r+5)(r-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = -5 \\ r_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}$$

b)

$$r^2 + 6r + 9 = (r+3)^2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = -3$$

c)

$$r^2 + 4r = r(r+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = -4 \\ r_2 = 0 \end{cases}$$

d)

$$2r^2 - 72 = 2(r^2 - 36) = 2(r+6)(r-6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = -6 \\ r_2 = 6 \end{cases}$$

3603. $y'' + 4y' + 4y = 0$

a) $y = Ce^{-2x}, y' = -2Ce^{-2x},\ y'' = 4Ce^{-2x} \Rightarrow$

$$4Ce^{-2x} - 8Ce^{-2x} + 4Ce^{-2x} = 0$$

b) $y = Cxe^{-2x}, y' = Ce^{-2x} - 2Cxe^{-2x},\ y'' = -2Ce^{-2x} - 2C(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) =$

$$= -4Ce^{-2x} + 4Cxe^{-2x} \Rightarrow (-4Ce^{-2x} + 4Cxe^{-2x}) + 4(Ce^{-2x} - 2Cxe^{-2x}) + 4Cxe^{-2x} =$$

$$= -4Ce^{-2x} + 4Cxe^{-2x} + 4Ce^{-2x} - 8Cxe^{-2x} + 4Cxe^{-2x} = 0$$

3604.

a) $r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow r = -1 \pm \sqrt{2.25} = -0.5 \pm 1.5 = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$

b) $r^2 + 0.2r - 0.8 = 0 \Rightarrow r = -0.1 \pm 0.9 = \begin{cases} 0.8 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = C_1 e^{0.8x} + C_2 e^{-x}$

c) $3r^2 - 6r = 0 \Rightarrow r = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{0x} = C_1 e^{2x} + C_2$

d) $r^2 - 1.2r + 0.36 = (r - 0.6)^2 = 0 \Rightarrow r = 0.6 \Rightarrow y(x) = C_1 e^{0.6x} + C_2 x e^{0.6x}$

e) $r^2 + 2r + 5 = 0 \Rightarrow r = -1 \pm 2i \Rightarrow y(x) = e^{-x}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$

f) $r^2 + 4r + 8 = 0 \Rightarrow r = -2 \pm 2i \Rightarrow y(x) = e^{-2x}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$

3605. a) $2r^2 - 2.4r + 0.22 = 2(r^2 - 1.2r + 0.11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1.1 \\ r_2 = 0.1 \end{cases} \Rightarrow$

$$y(x) = C_1 e^{0.1x} + C_2 e^{1.1x} \Rightarrow y'(x) = 0.1C_1 e^{0.6x} + 1.1C_2 e^{1.1x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 0.1C_1 + 1.1C_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 10 \\ C_1 = -10 \end{cases}$$

$$y(x) = 10 \cdot e^{1.1x} - 10 \cdot e^{0.1x}$$

b) $r^2 + 0.3r + 0.02 = 0 \Rightarrow r = -0.15 \pm 0.05 \Rightarrow y(x) = C_1 e^{-0.1x} + C_2 e^{-0.2x}$

$$y'(x) = -0.1C_1 e^{-0.1x} - 0.2e^{-0.2x}$$

$$y''(x) = 0.01C_1 e^{-0.1x} + 0.04e^{-0.2x}$$

$$\begin{cases} -0.1C_1 - 0.2C_2 = 1 \\ 0.01C_1 + 0.04C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 0.2C_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -20 \\ C_2 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(x) = 5e^{-0.2x} - 20e^{-0.1x}$$

c) $r^2 + 0.8r + 0.16 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -0.4 \Rightarrow y(x) = C_1 x e^{-0.4x} + C_2 e^{-0.4x}$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow y(x) = C_1 x e^{-0.4x}$$

$$y(1) = C_1 e^{-0.4} = 2 \Rightarrow C_1 = 2e^{0.4}$$

$$y(x) = 2xe^{0.4(1-x)}$$

d)

$$y'' + 9y' = 0 \Rightarrow r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm 3i$$

Fallet med två rent imaginära rötter till den karakteristiska ekvationen. Enligt formelbadet är lösningen:

$$y(x) = C_1 \sin rx + C_2 \cos rx \text{ men } y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \text{ dvs } y(x) = C_1 \sin rx$$

$$y' = rC_1 \cos rx \text{ men } y'(0) = 1.5 \Rightarrow C_1 = 0.5 \Rightarrow y(x) = 0.5 \sin 3x$$

3606. a) $r^2 + 0.8r + 1.16 = 0 \Rightarrow r = -0.4 \pm \sqrt{0.16 - 1.16} = -0.4 \pm i \Rightarrow$

$$y_h = e^{-0.4x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$$y_p = C_3 \Rightarrow C_3 = \frac{5.8}{1.16} = 5 \Rightarrow y = y_p + y_h = e^{-0.4x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 5$$

b)

$$r^2 + 2r - 3 = 0 \Rightarrow r = -1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{cases} r_1 = -3 \\ r_2 = 1 \end{cases}$$

$$y_p = C_2 + C_3x + C_4x^2 \Rightarrow y_p' = C_3 + 2C_4x \Rightarrow y_p'' = 2C_4$$

$$2C_4 + 2(C_3 + 2C_4x) - 3(C_2 + C_3x + C_4x^2) = 24x - 18x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2C_4 + 2C_3 - 3C_2 = 0 \\ 4C_4 + 3C_3 = 24 \\ -3C_4 = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_4 = 6 \\ C_3 = 0 \\ C_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow y = C_1e^x + C_2e^{-3x} + 6x^2 + 4$$

c) $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1 \Rightarrow y_h = C_1e^{-x} + C_2e^x$

$$y_p = C_3 \sin x + C_4 \cos x \Rightarrow y_p' = C_3 \cos x - C_4 \sin x \Rightarrow y_p'' = -C_3 \sin x - C_4 \cos x$$

$$-C_3 \sin x - C_4 \cos x - C_3 \sin x - C_4 \cos x = 2\cos x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -C_3 - C_3 = 0 \\ -C_4 - C_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = 0 \\ C_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow y = C_1e^{-x} + C_2e^x - \cos x$$

d)) $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow y_h = C_1e^x + C_2xe^x$

$$y_p = C_3e^{-x} \Rightarrow y_p' = -C_3e^{-x} \Rightarrow y_p'' = C_3e^{-x}$$

$$C_3e^{-x} - 2(-C_3e^{-x}) + C_3e^{-x} = 2e^{-x} \Rightarrow C_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

3607. Matas WolframAlpha med: $y' + 2y = -5\sin x, y(0) = 4$ fås direkt:

$$y(x) = 3e^{-2x} - 2\sin(x) + \cos(x)$$

En alternativ väg är att först lösa den partikuljära differentialekvationen:

$$y_p = A\sin x + B\cos x \Rightarrow y_p' = A\cos x - B\sin x$$

Med insättning fås:

$$A\cos x - B\sin x + 2(A\sin x + B\cos x) = -5\sin x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ -B + 2A = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow y_p = -2\sin x + \cos x$$

Och sedan behandla den homogena differentialekvationen $y_h' + 2y_h = 0 \Rightarrow y_h = Ce^{-2x}$.
Totalt fås:

$$y(x) = Ce^{-2x} + \cos x - 2\sin x \text{ och } y(0) = 4 \Rightarrow y(x) = 3e^{-2x} + \cos x - 2\sin x$$

3608. $y'' + 2y' - 8y = 0 \Rightarrow r^2 + 2r - 8 = 0 \Rightarrow r = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3$

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x}, \qquad y'(x) = 2C_1e^{2x} - 4C_2e^{-4x}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 - 4C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -6C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{3} \\ C_2 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{1}{3}(e^{2x} - e^{-4x})$$

3609.

$$y'' + 0.4y' + 5y = 0 \Rightarrow r^2 + 0.4r + 5 = 0 \Rightarrow r = -0.2 \pm \sqrt{0.2^2 - 5} =$$

$$= -0.2 \pm 2.2i \Rightarrow y(x) = \{\text{då } y(0) = 0 \text{ utelämnas } \cos 2.2x\} = Ce^{-0.2x} \cdot \sin 2.2x$$

$$y' = -0.2Ce^{-0.2x} \cdot \sin 2.2x + 2.2Ce^{-0.2x} \cdot \cos 2.2x$$

$$y'(0) = 2 \Rightarrow C = 0.90 \Rightarrow y(x) = 0.90e^{-0.2x} \cdot \sin 2.2x$$

3610.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2x \Rightarrow x'' + 2x = 0 \Rightarrow r^2 + 2 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{2}i$$

Då sin och cos har samma frekvens räcker det med den ena funktionen. $x(0) \neq 0$ ger att vi väljer cosinus.

$$x(t) = C\cos\sqrt{2}t, x(0) = 5.2 \Rightarrow C = 5.2 \Rightarrow x(t) = 5.2\cos\sqrt{2}t$$

$$x(t) = 0 \text{ då } \sqrt{2}t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \approx 1.1\ s$$

3611. a)

$$y'' = -0.16y \Rightarrow y'' + 0.16y = 0 \Rightarrow r^2 + 0.16 = 0 \Rightarrow r = \pm 0.4i$$

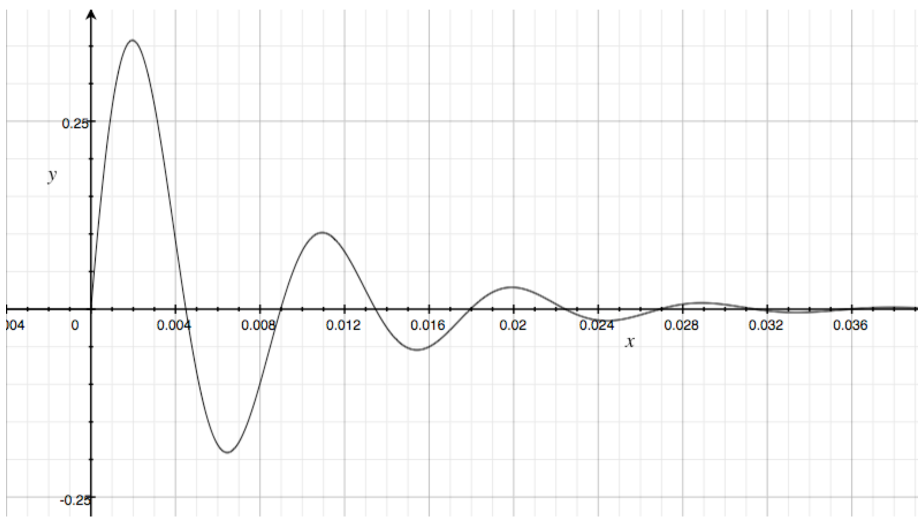
$$y(t) = C\sin 0.4t + 0.075\cos 0.4t \Rightarrow y'(t) = 0.4C\cos 0.4t - 0.075 \cdot 0.4\sin 0.4t$$

$$y'(0) = 0.03 \Rightarrow 0.4C = 0.03 \Rightarrow C = 0.075$$

$$y(t) = 0.075\sin 0.4t + 0.075\cos 0.4t$$

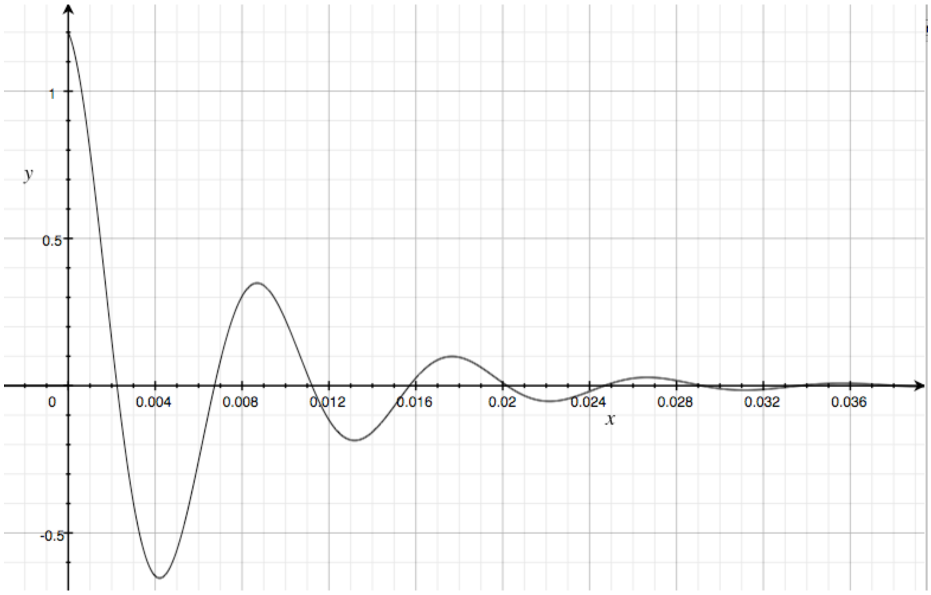
b) $d_{max} = \sqrt{0.075^2 + 0.075^2} \approx 0.11$ m

3612. Formuleringen är något oklar. Om det stod ”när strömmen sluts” i stället för ”när spänningen bryts” skulle lösningen bli så här:
Strömmen i spolen är noll från början dvs $i_l(0) = 0$.
$i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{1}{LC}i = 0, i(0) = 0$ och $i'(0) = \frac{U}{L} \approx 337$ A/s
$r^2 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow r = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \approx -140 \pm 700j \Rightarrow$
$i(t) = Ce^{-140t}\sin 700t \Rightarrow i'(t) = C700e^{-140t}\cos 700t - 140Ce^{-140t}\sin 700t$
$i'(0) = 337 = 700C \Rightarrow C \approx 0.48$
$i(t) = 0.48e^{-140t}\sin 700t$ A



Nu till lösningen om spolen är kopplad parallellt med kondensatorn från början och sålunda har en begynnelseström $i_l(0) = \frac{U}{R}$.

$i(t) = Ce^{-140t}\cos 700t \Rightarrow i(t) = 1.2e^{-140t}\cos 700t$

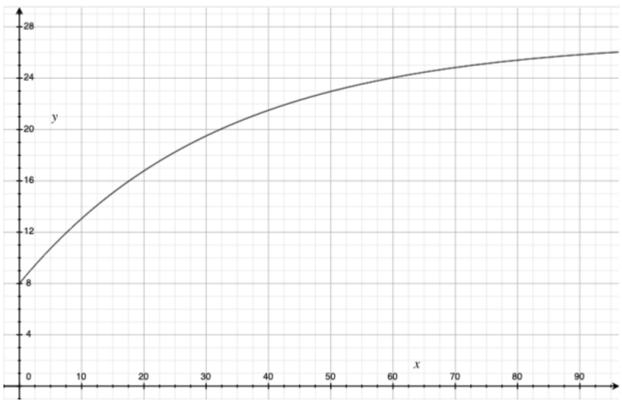


3701.
a) $y' = 0.031(27 - y)$ °/min

b) $y'(20) = 0.031(27 - 20) \approx 0.22$ °/min

c) $y(t) = 27 - 19e^{-0.031t}$

d) $y(t) = 27 - 19e^{-0.031t} = 22 \Rightarrow \ e^{-0.031t} = \frac{5}{19} \Rightarrow t \approx 43$ min



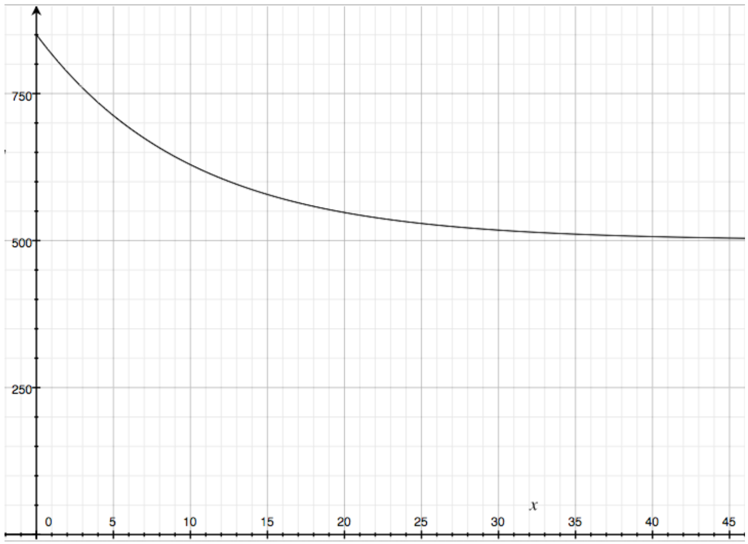
3702. a) 50 kg är tillskottet/år och $0.1m$ är de 10 % av föroreningarna som försvinner/år.

b) $m' = 50 - 0.1m = 0.1(500 - m)$, och $m(0) = 850$

$m(t) = 500 + 350e^{-0.1t}$

c) $m(5) = 500 + 350e^{-0.5} \approx 710$ kg

d) $m(\infty) = 500$ kg

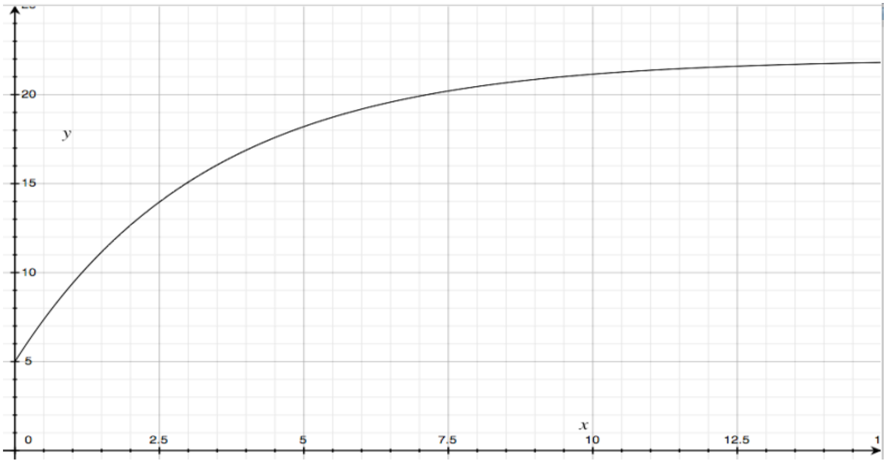


3703. Mycket text i uppgiften. Vad som vill sägas är att Nisses nya metod skall sänka nitrithalten till samma nivå (75 mg/l) som hans vattenbyte tidigare gjorde.
När vi hittat lösningen till differentialekvationen skall mängden utbytt vatten hittas när koncentrationen är 75 mg/l, dvs:

$$y(x) = 100e^{-x/200} \Rightarrow y(x) = 100e^{-x/200} = 75 \Rightarrow e^{-x/200} = 0.75 \Rightarrow x \approx 58 \text{ l}$$

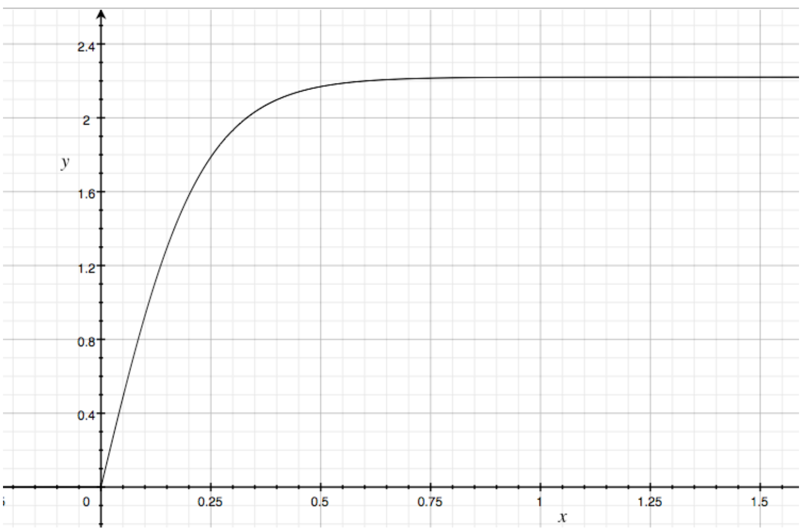
3704. $y' = -0.3(y - 22)$ °/min

$$y(t) = 22 - 17e^{-0.3t} \text{ °C} \Rightarrow y(5) \approx 18\text{°C}$$



3705. se exempel 2 sid 143
a) $F = am = v'm = mg - kv^2 \Rightarrow v' = g - \frac{k}{m}v^2 = 9.82 - 2v^2$

b) Med hjälp av WolframAlpha fås: $v(t) = \frac{2.22e^{8.9t} - 2.22}{e^{8.9t} + 1} = 2.22 - \frac{4.44}{e^{8.9t}+1}$
2.2 m/s
c) $v'(v = 0) = g - \frac{k}{m}v^2(0) = 9.82 - 2(0)^2 = 9.82 \text{ m/s}^2$
$v'(v = 2) = 9.82 - 2(2)^2 \approx 1.82 \text{ m/s}^2$



3706. a) $F = am = v'm = -kv^2 \Rightarrow v' = -\frac{k}{m}v^2 = -20v^2$

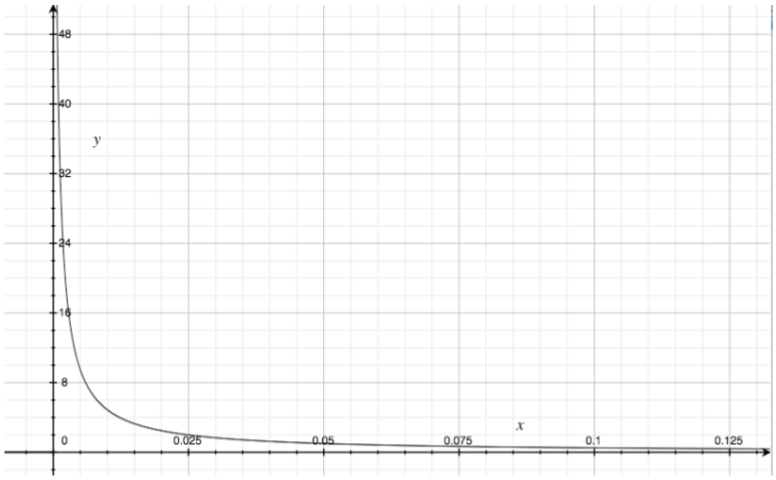
Differentialekvationen är separerbar enligt:

$$\frac{dv}{dt} = -20v^2 \Leftrightarrow \frac{dv}{v^2} = -20dt \text{ \{integrera båda sidor\} } -\frac{1}{v} = -20t + C$$

$$v(t) = \frac{1}{20t + C}, v(0) = 180 \Rightarrow v(t) = \frac{180}{3600t + 1}$$

b) $(0.001) = \frac{180}{3.6+1} \approx 39$ m/s

c)



3707. a) $y' = -0.027\big(y - (-20)\big)$ det är $-20°$ C.

b) Då kaffets temperatur närmar sig $-20°$ C går förändringen mot 0. (En mera realistisk modell tar hänsyn till övergången mellan vätska och fruset kaffe, men det lämnas till kurser i fysik.)

3708.
a) $T'(t) = -k(T(t) - T_o) \Rightarrow T'(t) = -k(T(t) - 21), T(t) = 61e^{-kt} + 21$

$T(1) = 61e^{-k} + 21 = 71 \Rightarrow k \approx 0.2$

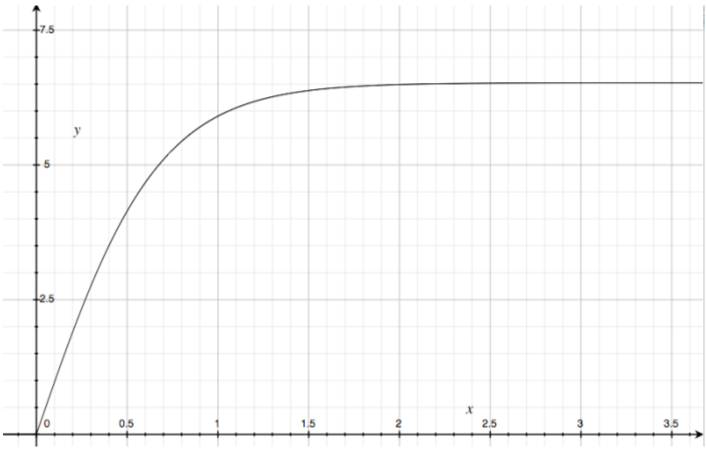
b) $(t) = 61e^{-0.2t} + 21 = 45 \Rightarrow t \approx 4.7$ min

3709. a) $F = am = y'm = mg - ky^2 \Rightarrow y' = g - \frac{k}{m}y^2 = 9.82 - \frac{18}{78}y^2$

Hastigheten är konstant {dvs $y' = 0$} när:

$$9.82 = \frac{18}{78}y^2 \Rightarrow y = \sqrt{9.82 \cdot \frac{78}{18}} \approx 6.52$$

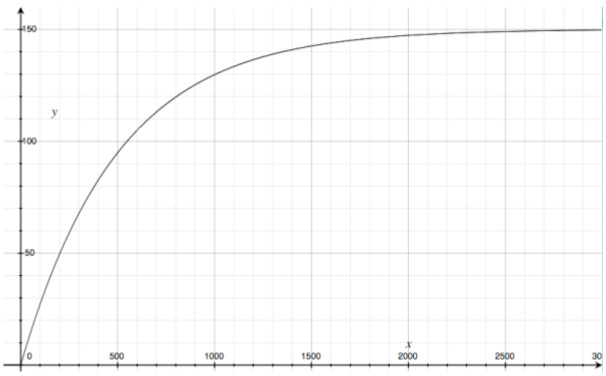
$y' = \frac{dy}{dt} = 9.82 - \frac{18}{78}y^2$ WolframAlpha ger $y(t) = \frac{6.52(e^{3x}-1)}{e^{3x}+1} \Rightarrow y(\infty) = 6.52$ m/s



3710.

$$y'(t) = 50 \cdot 0.006 - \frac{50}{25000}y(t) = 0.3 - \frac{1}{500}y(t) = \frac{1}{500}\big(150 - y(t)\big)$$

$$y(t) = 150(1 - e^{-0.002t})$$



3711. a)

$$\frac{da}{dt} = -0.6a \Rightarrow a(t) = 24e^{-0.6t}$$

b)

$$b'(t) = 0.6a - 0.09b = 14.4e^{-0.6t} - 0.09b \Rightarrow$$

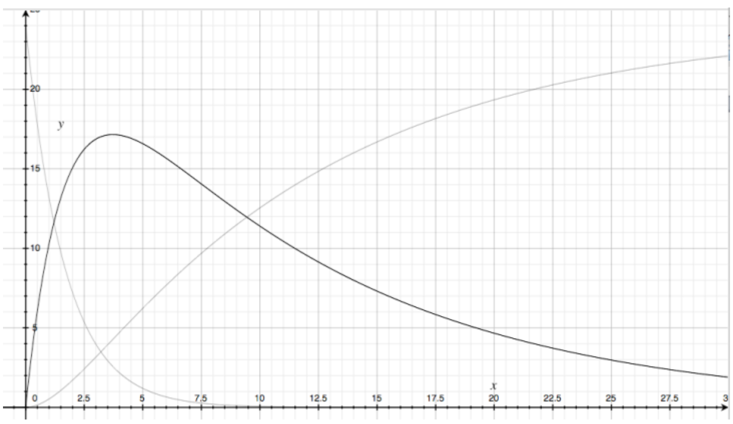
Sök lösningen till den homogena differentialekvationen $b_h'(t) + 0.09b_h = 0$ och ansätt $b_p = Ce^{-0.6t}$. Sätt in $b_p(t)$ i ekvationen och bestäm *C*.

$$b(t) = 28.2(e^{-0.09t} - e^{-0.6t})$$

c) $c'^{(t)} = 0.09b(t) = 0.09 \cdot 28.2(e^{-0.09t} - e^{-0.6t}) \Rightarrow c(t) = 2.54\left(\frac{1}{-0.09}e^{-0.09t} - \frac{1}{-0.6}e^{-0.6t}\right) + C_1$

$$\Rightarrow c(t) = 4.2e^{-0.6t} - 28.2e^{-0.09t} + 24$$

d)



e) $a(t) = 24e^{-0.6t} = 28.2(e^{-0.09t} - e^{-0.6t}) = b(t) \Rightarrow 52.2e^{-0.6t} = 28.2e^{-0.09t} \Rightarrow$

$$e^{-0.6t + \ln 52.2} = e^{-0.09t + \ln 28.2} \Rightarrow -0.6t + \ln 52.2 = -0.09t + \ln 28.2 \Rightarrow t = 1.21 \text{ s}$$

f) $b(t) = 28.2(e^{-0.09t} - e^{-0.6t}) \Rightarrow b'(t) = 28.2(-0.09e^{-0.09t} + 0.6e^{-0.6t}) = 0$

$$\Rightarrow 0.09e^{-0.09t} = 0.6e^{-0.6t} \Rightarrow \ln 0.09 - 0.09t = \ln 0.6 - 0.6t \Rightarrow t \approx 3.72$$

$$b(3.72) \approx 17.2\ \mu\text{g}$$

g) $a(5) \approx 1.19\ \mu\text{g}, b(5) \approx 16.6\ \mu\text{g},\ +c(5) \approx 6.23\ \mu\text{g}$

Test 3

Sid 149-150

1.

$2y' = -0.8y \Leftrightarrow y' = -0.4y \Rightarrow y(x) = Ce^{-0.4x}$ men $y(0) = -4 \Rightarrow y(x) = -4e^{-0.4x}$

2. Sök den primitiva funktionen 2 gånger.

$$y'' = 12x^2, y' = 4x^3 + C \; och \; y = x^4 + Cx + D$$

3. svaren i boken är inte direkt fel, men underliga. Metoden som används nedan kommer i kapitel 4.

a) $\frac{dA}{dt} = \frac{d\pi r^2}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$

b) $\frac{dA}{dt} = \frac{d4\pi r^2}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$

c) $\frac{dV}{dt} = \frac{d\frac{4}{3}\pi r^3}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

d) $\frac{dV}{dt} = kA$

4. Modellen förutsätter exponentiell tillväxt (något orimligt).

$$\frac{dN}{dt} = kN, 6 = k \cdot 42 \Rightarrow N'(t) = \frac{1}{7}N(t)$$

5.

$$y(x) = Ce^{-3x} \text{ men } y(0) = 2 \Rightarrow y(x) = 2e^{-3x} \; och \; y'(x) = -6e^{-3x}$$

Detta ger tangentens ekvation: $y - 2 = -6(x - 0)$ dvs $y = 2 - 6x$

6. a)

$$\frac{dN}{dt} = 0.017N(t)$$

b) $N(t) = 189\,000e^{0.017t} \Rightarrow N(9) = 189\,000 \cdot e^{0.017 \cdot 9} \approx 220\,000$ personer

7. a) Värdeminskningen är 35 % per år. (Det är värt att notera att det **inte** är värdeminskningen $V(t) = V_0 \cdot 0.65^t$ som differentialekvationen totalt beskriver.)

b) $V(t) = V_0 e^{-0.35 \cdot t} \Rightarrow V(3) = 420\,000e^{-0.35 \cdot 3} \approx 147\,000$ kr

8. Använd Newtons avsvalningslag där temperaturen börjar i 95 ° och svalnar av mot 21 °.
a)

$$T(t) = 21 + 74e^{-kt} = 21\left(1 + \frac{74}{21}e^{-kt}\right) \text{ och } T(5) = 21\left(1 + \frac{74}{21}e^{-k5}\right) = 65 \Rightarrow k \approx -0.104$$

b)

$$T(t) = 21 + 74e^{-0.104t} = 45 \Rightarrow t \approx 11 \text{ min}$$

10.

$$yy' - y\sqrt{x} = 1 \Rightarrow y' = \frac{y\sqrt{x} + 1}{y} = \sqrt{x} + \frac{1}{y}$$

x	y	y'
0,0	2,6	0,4
0,1	2,6	0,7
0,2	2,7	0,8
0,3	2,8	0,9
0,4	2,9	1,0
0,5	3,0	1,0
0,6	3,1	1,1
0,7	3,2	1,1
0,8	3,3	1,2
0,9	3,4	1,2
1,0	3,6	1,3
1,1	3,7	1,3
1,2	3,8	1,4
1,3	3,9	1,4
1,4	4,1	1,4
1,5	4,2	1,5
1,6	4,4	1,5
1,7	4,5	1,5
1,8	4,7	1,6
1,9	4,8	1,6
2,0	5,0	1,6
2,1	5,2	1,6
2,2	5,3	1,7
2,3	5,5	1,7
2,4	5,7	1,7
2,5	5,8	1,8
2,6	6,0	1,8
2,7	6,2	1,8
2,8	6,4	1,8
2,9	6,5	1,9
3,0	6,7	1,9

3,1	6,9	1,9
3,2	7,1	1,9
3,3	7,3	2,0
3,4	7,5	2,0
3,5	7,7	2,0
3,6	7,9	2,0
3,7	8,1	2,0
3,8	8,3	2,1
3,9	8,5	2,1
4,0	8,7	2,1

11.

$$F = m \cdot a = m \cdot v' = mg - k \cdot v^{1.8} \Rightarrow v' = g - \frac{k}{m} \cdot v^{1.8} \text{ m/s}$$

Maximal hastighet fås då $v'(t) = 0$ dvs då $g = \frac{k}{m} v^{1.8} \Rightarrow v_{max} = \left(\frac{mg}{k}\right)^{\frac{1}{1.8}} \approx 30 \text{ m/s}.$

12. Använd den logistiska tillväxtekvationen:

$$S' = 0.003 \cdot S(S_{max} - S) \text{ där } S_{max} = 100\,000$$

$$S(t) = \frac{100\,000 \cdot e^{0.3t}}{9 + e^{0.3t}} \Rightarrow S(21) = \frac{100\,000 \cdot e^{4.2}}{9 + e^{4.2}} \approx 28\,000 \text{ st}$$

13. Använd den karakteristiska ekvationen:

$$y'' + 4y' - 5 = 0 \Rightarrow r^2 + 4r - 5 = (r - 1)(r + 5) = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -5 \Rightarrow$$

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-5x} \Rightarrow y'(x) = C_1 e^{-x} - 5C_2 e^{-5x}$$

Begynnelsevillkoren ger:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - 5C_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -4/3 \\ C_1 = 4/3 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \frac{4}{3}(e^{-x} - e^{5x})$$

14. Det som krävs är att den karakteristiska ekvationen har rötterna $r = 3$ och $r = -3$ dvs:

$$(r - 3)(r + 3) = r^2 - 9 = 0 \Rightarrow y'' - 9y = 0$$

15.

$$\frac{dp(h)}{dh} = -kp(h) \Rightarrow p(h) = P_0 \cdot e^{-kh}$$

(Det står fel facit i uppgiften. Det borde stått att trycket faller proportionellt mot trycket (inte proportionellt mot höjden)).

b) $48.3 = 101.3e^{-k5} \Rightarrow k = 0.148\ \text{km}^{-1}$

c) $101.3e^{-0.148 \cdot 8.5} \approx 28.8\ \text{kPa}$

16.

$$y' = ky(M-y) \Leftrightarrow y(x) = \frac{Me^{Mkx}}{C + e^{Mkx}}$$

$$y' = 0.000085(5000-y) \Rightarrow y(t) = \frac{5000e^{0.425t}}{49 + e^{0.425t}}$$

a) $y(2) = \frac{5000e^{0.85}}{49+e^{0.85}} \approx 230$ fiskar

b) $y(4) = \frac{5000e^{1.7}}{49+e^{1.7}} \approx 500$ fiskar

c) När 5000 är uppnått är tillväxten $y' = 0$, dvs max 5000 fiskar.

d) $\frac{5000e^{0.425t}}{49+e^{0.425t}} = 2500 \Rightarrow 2e^{0.425t} = 49 + e^{0.425t} \Rightarrow t = \frac{\ln 49}{0.425} \approx 9$ månader

17. a) $v'(t) = -\frac{12}{800}v^2(t) = -0.015v^2(t)$

b) WolframAlpha ger: $v(t) = \frac{200}{3t-200c_1} = \frac{\frac{200}{3}}{t-\frac{200c_1}{3}}, y(0) = 35 \Rightarrow\ v(t) = \frac{200/3}{t+\frac{200}{3 \cdot 35}} \approx \frac{67}{t+1.9}$

c) $v(3) \approx 14\ \text{m/s}$

d) $v(t) = s'(t) \Rightarrow s(t) = 67\ln(t+1.9) - 43 \Rightarrow s(3) = 67\ln(3+1.9) - 43 \approx 63\ \text{m}$

Blandade uppgifter

Blandade uppgifter sid 151-155

1. a) $y(x) = \frac{7}{2}x^2 + C$

b) $2y' - 6x = 0 \Rightarrow y' = 3x \Rightarrow y(x) = \frac{3}{2}x^2 + C$

c) $y'' = 6x + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2x + C \Rightarrow y(x) = x^3 + x^2 + Cx + C_2$

d) $y'' = 8e^{-2x} \Rightarrow y' = -4e^{-2x} + C_1 \Rightarrow y(x) = 2e^{-2x} + C_1x + C_2$

2. $y'(x) = k\sqrt{x}, (1,2) \Rightarrow k = 0.6 \Rightarrow y' = 0.6\sqrt{x} \Rightarrow y(x) = 0.6\frac{2}{3}x^{3/2} + 1.6 = 0.4x\sqrt{x} + 1.6$

$$y(4) = 0.4 \cdot 4^{\frac{3}{2}} + 1.6 = 4.8 \text{ och } y'(4) = 0.6\sqrt{4} = 1.2$$

3. a) $I'(t) + I(t) = 2.5 \Rightarrow I(t) = Ce^{-t} + 2.5$

b) 2.5 A

4. $y' = y \Rightarrow y(x) = Ce^{x}$ och $\Rightarrow y(0) = 3 \Rightarrow y(x) = 3e^{x}$

5.

$$2\frac{dy}{dx} - y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}y = 0 \Rightarrow y(x) = Ce^{0.5x} \text{ och } (0,3) \text{ ger } y(x) = 3e^{0.5x}$$

6. $\frac{dy}{dx} = -2y$ ger direkt att $y(x) = Ce^{-2x}$ och punkten (1,2) att $2 = Ce^{-2}$ dvs $C = 2e^{2}$.

$$y(x) = 2e^{2} \cdot e^{-2x} = 2 \cdot e^{2-2x} \Rightarrow y' = -4 \cdot e^{2-2x} \Rightarrow$$

Tangenten får beskrivningen: $y - 2 = -4(x - 1) \Rightarrow y = -4x + 6$

7. Använd den karakteristiska ekvationen:

$$y'' + 4y' - 12y = 0 \Rightarrow r^2 + 4r - 12 = (r+6)(r-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = -6 \end{cases}$$

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{-6x} \Rightarrow y'(x) = 2Ae^{2x} - 6Be^{-6x} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - 6B = 3 \end{cases} \text{ dvs } \begin{cases} A = 3/8 \\ B = -3/8 \end{cases}$$

Svar: $y(x) = \frac{3}{8}(e^{2x} - e^{-6x})$

8. $y' + 3y = 0 \Rightarrow y' = -3y$ i $(0,-2)$ är $k = y'(0) = -3 \cdot y = -3(-2) = 6$.

9.

$$y' = -xy - \frac{1}{y}$$

x	y	y'
0,00	1,00	-1,00
-0,05	1,05	-0,90
-0,10	1,09	-0,80
-0,15	1,14	-0,71
-0,20	1,17	-0,62
-0,25	1,20	-0,53
-0,30	1,23	-0,45
-0,35	1,25	-0,36
-0,40	1,27	-0,28
-0,45	1,28	-0,20
-0,50	1,29	-0,13
-0,55	1,30	-0,06
-0,60	1,30	0,01
-0,65	1,30	0,08
-0,70	1,30	0,14
-0,75	1,29	0,19
-0,80	1,28	0,24
-0,85	1,27	0,29
-0,90	1,25	0,33
-0,95	1,24	0,37
-1,00	1,22	0,40
-1,05	1,20	0,43
-1,10	1,18	0,45
-1,15	1,16	0,46
-1,20	1,13	0,48
-1,25	1,11	0,48
-1,30	1,08	0,49
-1,35	1,06	0,49
-1,40	1,04	0,48
-1,45	1,01	0,48
-1,50	0,99	0,47
-1,55	0,96	0,46
-1,60	0,94	0,44
-1,65	0,92	0,43
-1,70	0,90	0,41
-1,75	0,88	0,39
-1,80	0,86	0,38
-1,85	0,84	0,36
-1,90	0,82	0,34
-1,95	0,80	0,32

-2,00	0,79	0,30

10. a)

x	y	y'
0,0	1,0	1,0
0,5	1,5	1,6
1,0	2,3	2,2
1,5	3,4	2,9
2,0	4,8	3,6
2,5	6,6	4,4
3,0	8,8	5,2

b)

x	y	y'
0,00	1,00	1,00
0,05	1,05	1,07
0,10	1,10	1,13
0,15	1,16	1,20
0,20	1,22	1,26
0,25	1,28	1,33
0,30	1,35	1,40
0,35	1,42	1,46
0,40	1,49	1,53
0,45	1,57	1,60
0,50	1,65	1,67
0,55	1,73	1,73
0,60	1,82	1,80
0,65	1,91	1,87
0,70	2,00	1,94
0,75	2,10	2,01
0,80	2,20	2,08
0,85	2,30	2,15
0,90	2,41	2,22
0,95	2,52	2,29
1,00	2,64	2,36
1,05	2,76	2,44
1,10	2,88	2,51
1,15	3,00	2,58
1,20	3,13	2,66
1,25	3,26	2,73
1,30	3,40	2,81
1,35	3,54	2,88
1,40	3,69	2,96
1,45	3,83	3,03
1,50	3,99	3,11

1,55	4,14	3,19
1,60	4,30	3,27
1,65	4,46	3,34
1,70	4,63	3,42
1,75	4,80	3,50
1,80	4,98	3,58
1,85	5,16	3,66
1,90	5,34	3,74
1,95	5,53	3,82
2,00	5,72	3,91
2,05	5,91	3,99
2,10	6,11	4,07
2,15	6,32	4,15
2,20	6,52	4,24
2,25	6,73	4,32
2,30	6,95	4,41
2,35	7,17	4,49
2,40	7,40	4,58
2,45	7,62	4,66
2,50	7,86	4,75
2,55	8,10	4,84
2,60	8,34	4,93
2,65	8,58	5,02
2,70	8,83	5,11
2,75	9,09	5,19
2,80	9,35	5,28
2,85	9,61	5,38
2,90	9,88	5,47
2,95	10,16	5,56
3,00	10,43	5,65

11.

$$2y' + \frac{4}{x}y = \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x} \Leftrightarrow xy' + 2y = \frac{4}{x} - 2$$

Högerledets utseende gör att man kan prova med att ansätta:

$$y = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + C \Rightarrow y' = -2\frac{A}{x^3} - \frac{B}{x^2}$$

$$x\left(-2\frac{A}{x^3} - \frac{B}{x^2}\right) + 2\left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + C\right) = \frac{4}{x} - 2$$

$$-2\frac{A}{x^2} - \frac{B}{x} + \frac{2A}{x^2} + \frac{B2}{x} + 2C = \frac{4}{x} - 2$$

$$\begin{cases} A = \text{godtyckligt} \\ B = 4 \\ C = -1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{A}{x^2} + \frac{4}{x} - 1$$

12. $y' - \sin(x) \cdot y = 0$ ansätt $y = Ce^{-\cos x} \Rightarrow y' = C \sin x \; e^{-\cos x}$ och $y(x) = 8e^{-\cos x}$

13. $f''(x) + 9f(x) = 0 \Rightarrow r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm 3i \Rightarrow f(x) = A \sin 3x + B \cos 3x$

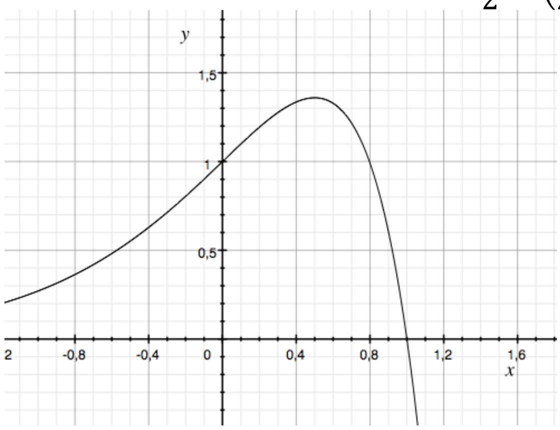
$$f'(x) = 3A \cos 3x - 3B \sin 3x \Rightarrow B = 4 \text{ och } A = \frac{5}{3}$$

$$f(x) = \frac{5}{3}\sin 3x + 4\cos 3x \Rightarrow \; f_{max}(x) = \sqrt{\frac{25}{9} + 16} = \frac{13}{3}$$

14. $y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0 \Rightarrow r = 2$, dubbelrot

$$y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} \Rightarrow \begin{cases} Ae^2 + Be^2 = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = e^{2x} - xe^{2x} = e^{2x}(1-x)$$

$$\Rightarrow y'(x) = 2e^{2x}(1-x) - e^{2x} = 0 \text{ då } x = \frac{1}{2}, y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e}{2}$$



15.

$$1400 = 900 \cdot a^2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{14}}{3}; N(5) = 900 \cdot \left(\frac{\sqrt{14}}{3}\right)^5 \approx 2\ 700 \text{ st}$$

16. Den logistiska tillväxtekvationen:

$$y' = ky(M - y) \Leftrightarrow y(x) = \frac{Me^{Mkx}}{C + e^{Mkx}}$$

a) I det här fallet är: $k = 0.003$ och $M = 500 \Rightarrow y(x) = \frac{500e^{1.5x}}{49+e^{1.5x}} \Rightarrow y(1) \approx 42, y(4) \approx 446$

b) $y'(1) = 0.003y(1)\big(500 - y(1)\big) \approx 58\ \frac{\text{flugor}}{\text{dygn}}$ och $y'(4) \approx 72\ \frac{\text{flugor}}{\text{dygn}}$

17. a) 10 % tillväxt i början betyder att $y'(0) = 4$

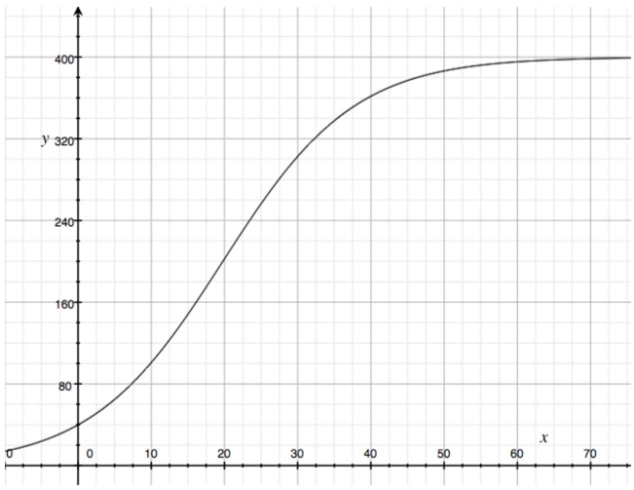
$$y' = ky(M - y) \Leftrightarrow 4 = k \cdot 40(400 - 40) \Rightarrow k = 2.8 \cdot 10^{-4}$$

b)

$$y' = 2.8 \cdot 10^{-4} y(400 - y)$$

c)

$$y(x) = \frac{400e^{0.11x}}{9 + e^{0.11x}} = 300 \Leftrightarrow x \approx 30 \text{ år}$$



18. a)

$$\frac{dN}{dt} = kN(t)$$

b) Om halveringstiden är $4.5 \cdot 10^9$ år blir mängden vid tiden t:

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4.5 \cdot 10^9}}$$

c)

$$0.146 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4.5\cdot 10^9}} \Rightarrow t = \frac{\lg 0.146}{\lg 0.5} \cdot 4.5 \cdot 10^9 \approx 12 \cdot 10^9 \text{ år}$$

19.
$\frac{dP}{dt} = kP \Rightarrow P(t) = Ce^{kt}$ Fram: $2.5 = 2.8e^{-k_1 6} \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{6}\ln\frac{2.5}{2.8} \Rightarrow P_{fram}(20) = 1.9$ bar

$$\text{Bak: } 2.6 = 2.8e^{-k_2 6} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{6}\ln\frac{2.6}{2.8} \Rightarrow P_{bak}(20) = 2.2 \text{ bar}$$

Skillnaden är: $P_{\text{bak}}(20) - P_{\text{fram}}(20) = 2.8(e^{-20k_2} - e^{-20k_1}) \approx 0.268$ bar högre bak.

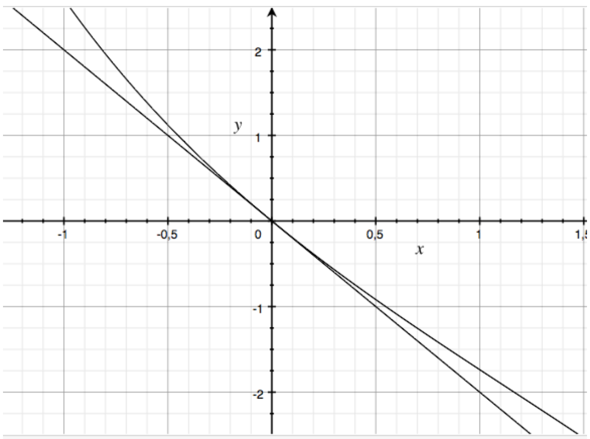
20. Ekvationen saknar funktionen y efter faktorn 0.32. Såhär borde den sett ut:

$$y'' + 0.4y' - 0.32y = 0 \Rightarrow r = -0.2 \pm \sqrt{0.2^2 + 0.32} = -0.2 \pm 0.6 = \begin{cases} 0.4 \\ -0.8 \end{cases}$$

$$y(x) = C_1e^{0.4x} + C_2e^{-0.8x}, y'(x) = 0.4C_1e^{0.4x} - 0.8C_2e^{-0.8x} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 0.4C_1 - 0.8C_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 1.2C_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -C_1 = \frac{5}{3} \\ C_1 = -\frac{2}{1.2} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{5}{3}e^{-0.8x} - \frac{5}{3}e^{0.4x}$$



21. a) Faktorn $(6000 - N)$ betyder att ju närmare populationen kommer 6000 st, desto mindre blir ökningen, dvs tillväxten stannar av.

b) Tillväxten är störst vid halva den maximala populationen dvs då $N = 3000$.

$$3000 = \frac{6000}{6.5e^{-0.04848t} + 1} \Rightarrow 6.5e^{-0.04848t} + 1 = 2 \Rightarrow t = 38.6 \text{ min}$$

22.
a) $N' = -1.79 \cdot 10^{-9}N(t) \Rightarrow N(t) = 2 \cdot 10^{23}e^{-1.79 \cdot 10^{-9}t}$

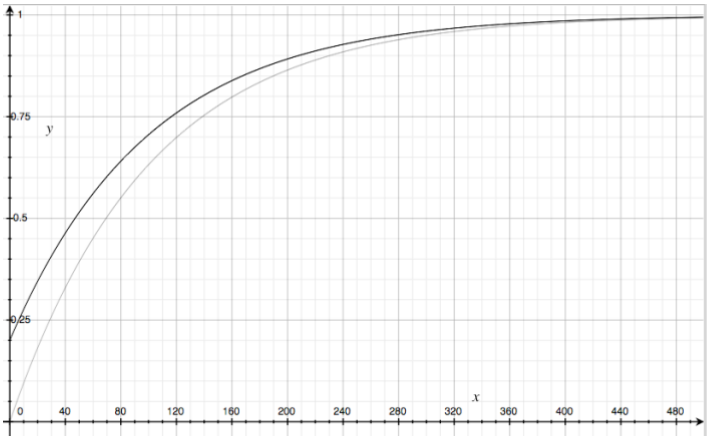
b) $N'(0) = -1.79 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{23} \approx -3.6 \cdot 10^{14}$ st/s

c) $N(0) - N(1\ \text{år}) = 2 \cdot 10^{23}\left(1 - e^{-1.79 \cdot 10^{-9} 1\text{år}}\right) \approx 1.1 \cdot 10^{22}$st dvs ca 5.5 %

23. a) $p' = k(p_a - p) \Rightarrow p(t) = 1 - e^{-0.01t}$

b) $p(t) = 1 - 0.8e^{-0.01t}$

c)



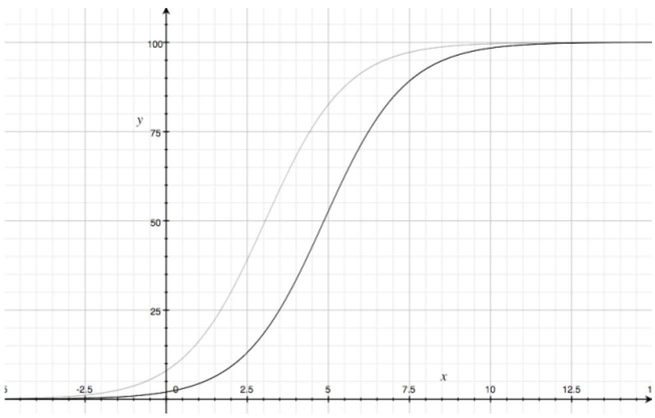
d) $(t) = 1 - e^{-0.01t} = 0.9 \Rightarrow t \approx 230$ s

24. $y' = 0.008y(100 - y),\ y(0) = 8 \Rightarrow y(t) = \frac{100e^{0.8t}}{11.5+e^{0.8t}}$

$y(3) \approx 49$ st, ca 20 st/dag

$y' = 0.008y(100 - y), y(0) = 2 \Rightarrow y(t) = \dfrac{100e^{0.8t}}{49 + e^{0.8t}}$

$y(3) \approx 18$ st, ca 12 st/dag



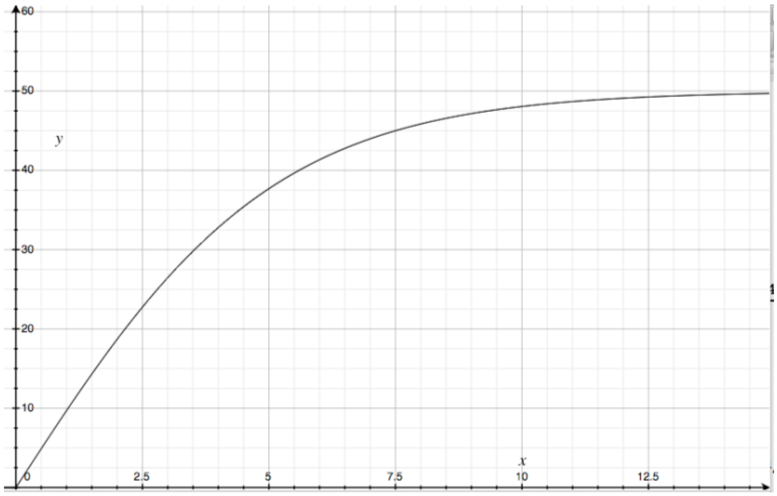
25. (Det är tyvärr flera fel i facit i den här uppgiften.)

$$F = am = v'm = mg - kv^2 \Rightarrow v' = g - \frac{k}{m}v^2 = 9.82 - \frac{k}{80}v^2$$

a) Vid den maximala hastigheten 50 m/s är $v' = 0$ dvs

$$\Rightarrow 0 = 9.82 - \frac{k}{80}v^2 \Rightarrow 9.82 = \frac{k}{80}50^2 \Rightarrow k = 0.314 \text{ /m}$$

b) $v' = g - \frac{k}{m}v^2 = 9.82 - \frac{0.314}{80}v^2 \Rightarrow v(t) = 50\frac{e^{0.393t}-1}{e^{0.393t}+1}$ m/s



c) $v(3) \approx 26$ m/s, $v(8) \approx 46$ m/s

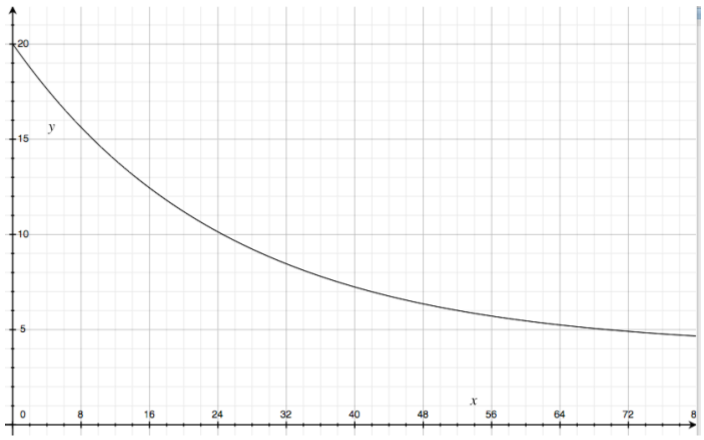
26.

$$y' = -Cy \Rightarrow y(t) = Ce^{-at} = \begin{Bmatrix} y(0) = 1 \\ y(3) = 0.2 \end{Bmatrix} = e^{t\frac{\ln 0.2}{3}} \approx e^{-0.536t}$$

$$y(12) = e^{-0.536 \cdot 12} \approx 0.0016\ \%$$

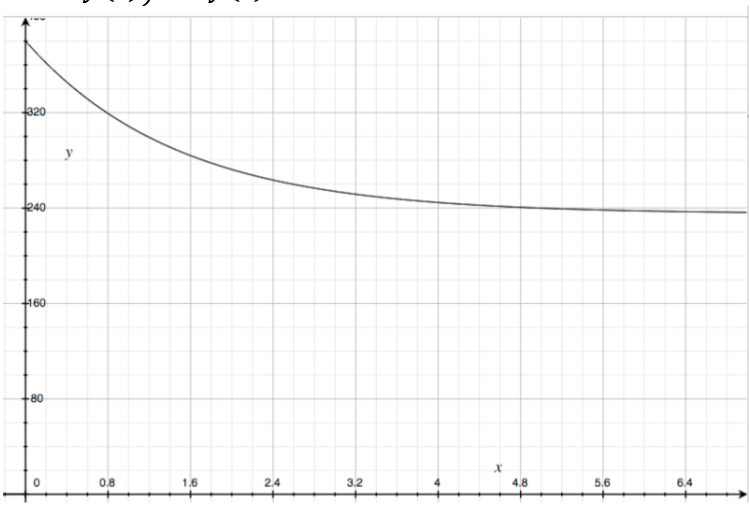
27. a) $T' = k(T - T_{\text{rum}}) = -0.04(T-4) \Rightarrow T(t) = 4 + 16e^{-0.04t}$ °C

b) $10 = 4 + 16e^{-0.04t_{10}} \Rightarrow t_{10} \approx 24$ min och $t_5 \approx 69$ min

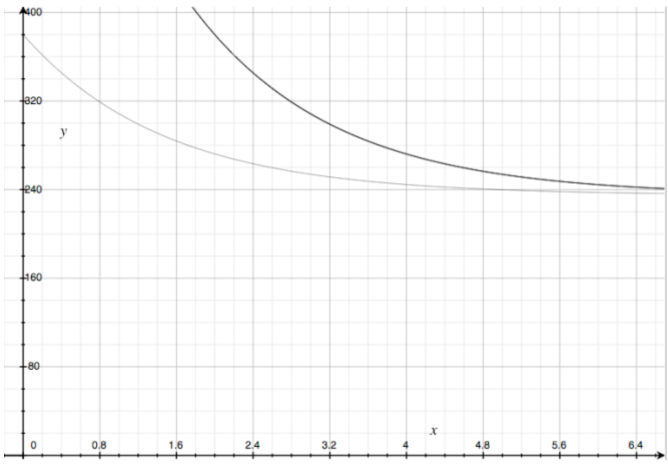


28. a) $y'(t) = 160 - 0.68y(t), y(0) = 380$ mg

b) $y'(t) = 0.68\big(235 - y(t)\big) \Rightarrow y(t) = 145e^{-0.68t} + 235$



c) Om den initiala dosen görs större kommer tiden det tar att nå slutvärdet 235 mg bli längre. Exempel 800 mg i grafen nedan.



d) Om den dagliga dosen ökas kommer slutvärdet att stanna på ett högre värde.

e) Hur stor den dagliga dosen är.

29. $T' = k(T_{\text{Rum}} - T)$, ju närmare T kommer T_{Rum}, desto mindre blir derivatan. Om $T_{\text{Rum}} > T$ initialt är derivatan positiv och T stiger. Är $T_{\text{Rum}} < T$ initialt är derivatan negativ och T minskar (svalnar).

30.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = k \Rightarrow f'(x) = kf(x) \Rightarrow f''(x) = kf'(x) = kkf(x) = k^2 f(x)$$

$$f^{(n)}(x) = k^n f(x) \Rightarrow \frac{f^{(n)}(x)}{f(x)} = k^n$$

31.

a) $v'(t) = 10 - 20v(t)$

b) $v'(t) = 10 - 20v(t) = 20\big(0.5 - v(t)\big) \Rightarrow v(t) = 0.5(1 - e^{-20t})$

c) 0.5 m/s

32.

$$F = am = v'm = mg - kv \Rightarrow v' = g - \frac{k}{m}v, v' = 0 \text{ då } v = \frac{gm}{k}$$

33. a) $y'(t) = 20 \cdot 2 - \frac{20}{10000}y(t) = 40 - \frac{1}{500}y(t) = \frac{1}{500}\big(20\,000 - y(t)\big)$

$y(t) = 20\,000\left(1 - e^{-\frac{t}{500}}\right)$

b) $y(t) = 20\,000\left(1 - e^{-\frac{t}{500}}\right) = 6000 \Rightarrow t \approx 178$ s

c) $\frac{20\,000\text{ mg}}{10\,000\text{ l}} = 2$ mg/l