Matematik 5 svar

Kapitel 2

2113.

$$\frac{n^3 - n}{3} = \frac{n(n^2-1)}{3} = \{\text{konjugatregeln}\} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

Av tre på varandra följande tal måste ett vara delbart med 3.

2116. Faktorisera polynomet.

$$a^2 + 3a + 2 = (a+1)(a+2)$$

Dvs om $a + 1$ är delbart med 5 är även $a^2 + 3a + 2$ delbart med 5.

2206. Uppgiften är något otydlig. Hur svaret i facit blivit till i a) är svårt att förstå.

a) $\frac{25}{n} = 2 + \frac{r}{n} \Rightarrow 25 = 2n + r$ om $n = 12$ blir resten $r = 1$.

b) $\frac{25}{n} = 5 + \frac{r}{n} \Rightarrow 25 = 5n + r$ om $n = 5$ blir resten $r = 0$.

c) $\frac{25}{n} = 4 + \frac{r}{n} \Rightarrow 25 = 4n + r$ om $n = 6$ blir resten $r = 1$.

d) $\frac{25}{n} = 12 + \frac{r}{n} \Rightarrow 25 = 12n + r$ om $n = 2$ blir resten $r = 1$.

2301. a) $99(\text{mod}9) \equiv 0 \equiv 9(\text{mod}9)$

b) $17(\text{mod}4) \equiv 1 \equiv 1(\text{mod}4)$

c) $11(\text{mod}17) \equiv 11(\text{mod}17)$

d) $147(\text{mod}17) \equiv 11 \equiv 11(\text{mod}17)$

2302. a) $35(\text{mod}5) \equiv 0 \equiv 20(\text{mod}5)$

b) $35 \equiv 5(\text{mod}10) \neq 0 \equiv 20(\text{mod}10)$

c) $17 \equiv 1(\text{mod}2) = 1 \equiv 9(\text{mod}2)$

d) $17(\text{mod}8) \equiv 1 \equiv 9(\text{mod}8)$

2303.

$$\frac{n}{36} = 1 + \frac{5}{36} = \frac{36}{36} + \frac{5}{36} = \frac{41}{36} \Rightarrow n = 41$$

2304.

$$\frac{59}{7} = 8 + 3 \Rightarrow 59(\text{mod}7) \equiv 3 \text{ och } \frac{24}{7} = 3 + 3 \Rightarrow 24(\text{mod}7) \equiv 3 \text{ dvs } 59 \equiv 24(\text{mod}7)$$

$$\text{och } 59 \equiv 3(\text{mod}7)$$

b) och c)

2305. a) $2(\text{mod}7) \equiv 9 \equiv 16 \equiv 23$

b) $2(\text{mod}11) \equiv 13 \equiv 24 \equiv 34$

2306. $13(\text{mod}9) \equiv 4 \equiv 22 \equiv 31 \equiv 40 \equiv 49$

2307. $a \equiv 5(\text{mod } 8) \Rightarrow a = 13, 21, 29, 37, 45, 53, 61, 69, 77, 85, 93, 101, 109, 117$
$a \equiv 14(\text{mod } 15) \Rightarrow a = 29, 44, 59, 74, 89, 104, 119$

2308. Restklasserna modulo 4 är 0, 1, 2 och 3.

Enda talet som uppfyller båda villkoren är $a = 29$.

2309. $n^2 \equiv 0$ eller $n^2 \equiv 1$ (mod 3)
För restklass 0 gäller $n = 3k$ och $n^2 = 9k^2 = 3 \cdot 3k^2 \equiv 0(\text{mod } 3)$,
för restklass 1 gäller $n = 3k + 1$ och $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 \equiv 1(\text{mod } 3)$ och
för restklass 2: $n = 3k + 2$ dvs $n^2 = 9k^2 + 12k + 4 \equiv 1(\text{mod } 3)$ VSV

2310. a) $14 + 36 + 80(\text{mod}7) \equiv 0 + 1 + 3(\text{mod}7) \equiv 4(\text{mod}7)$

b) $62 \cdot 1000(\text{mod}3) \equiv 2 \cdot 1(\text{mod}3) \equiv 2(\text{mod}3)$

c) $42^5(\text{mod}8) \equiv 2^5(\text{mod}8) \equiv 0(\text{mod}8)$

2311. a) $33 + 41(\text{mod}4) \equiv 1 + 1(\text{mod}4) \equiv 2(\text{mod}4)$

b) $5 \cdot 10 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 8(\text{mod}3) \equiv 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2(\text{mod}3) \equiv 2(\text{mod}3)$

c) $10^9 + 50 + 83(\text{mod}9) \equiv 1^9 + 5 + 2(\text{mod}9) \equiv 8(\text{mod}9)$

d) $61^{100}(\text{mod}60) \equiv 1^{100}(\text{mod}60) \equiv 1(\text{mod}60)$

2312. a) $1 + 2(\text{mod}6) \equiv 3$

b) $50 \cdot 55(\text{mod}6) \equiv 2 \cdot 1(\text{mod}6) \equiv 2$

c) $55^{10}(\text{mod}6) \equiv 1^{10}(\text{mod}6) \equiv 1$

d) $4 \cdot 50 + 5 \cdot 55(\text{mod}6) \equiv 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1(\text{mod}6) \equiv 13(\text{mod}6) \equiv 1$

2313. a) $x + y(\text{mod}5) \equiv 3(\text{mod}5) + \big(6(\text{mod}5)\big)(\text{mod}5) \equiv 3(\text{mod}5) + 1(\text{mod}5) \equiv 4(\text{mod}5)$

b) $3x + 2y(\text{mod}5) \equiv 3 \cdot 3(\text{mod}5) + \big(2 \cdot 6(\text{mod}5)\big)(\text{mod}5) \equiv 4(\text{mod}5) + 2(\text{mod}5) \equiv 1(\text{mod}5)$

c) $-x(\text{mod}5) \equiv -3(\text{mod}5)(\text{mod}5) \equiv 2(\text{mod}5)$

d) $x \cdot y(\text{mod}5) \equiv 3 \cdot 6(\text{mod}5) \equiv 3(\text{mod}5)$

2314. $n \equiv 7(\text{mod}9) \equiv 16(\text{mod}9) \equiv 25(\text{mod}9) \equiv 34(\text{mod}9)$

2315. a) $10(\text{mod}9) \equiv 1(\text{mod}9)$

b) $10^{100}(\text{mod}9) \equiv 1^{100}(\text{mod}9) \equiv 1(\text{mod}9)$

c) $10^{200}(\text{mod}9) \equiv 1^{200}(\text{mod}9) \equiv 1(\text{mod}9)$

d) $10^{n}(\text{mod}9) \equiv 1^{n}(\text{mod}9) \equiv 1(\text{mod}9)$

2316. $42^5(\text{mod}8) \equiv 2^5(\text{mod}8) \equiv 2^3 \cdot 2^2(\text{mod}8) \equiv 8 \cdot 2^2(\text{mod}8) \equiv 0(\text{mod}8)$

2317. $(2n)^2(\text{mod } 4) \equiv 4n^2(\text{mod } 4) \equiv 0(\text{mod } 4)$

2318. $(3n + 1)^3(\text{mod } 9) \equiv (27n^3 + 3 \cdot 9n^2 + 3 \cdot 3n + 1)(\text{mod } 9) \equiv 1(\text{mod } 9)$

2319. $621 = 6 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1 = 6(99 + 1) + 2(9 + 1) + 1 = 6 \cdot 99 + 2 \cdot 9 + 6 + 2 + 1$ dvs om $6 + 2 + 1 = 9$ är delbart med 3 är talet 621 delbart med 3 VSV.

2320. $(9^n - 1)(\text{mod } 8) \equiv (1^n - 1)(\text{mod } 8) \equiv 0(\text{mod } 8)$

2321. $1000(\text{mod}7) \equiv 6(\text{mod}7)$ dvs måndag.

2322. $25^{100}(\text{mod}24) \equiv 1^{100}(\text{mod}24)$ dvs klockan 13.

2323. $292 \cdot 429 + 533 \cdot 225 = (288 + 4)(420 + 9) + (528 + 5)(222 + 3) =$

$$= (4 \cdot 3)(\text{mod } 6) + (5 \cdot 3)(\text{mod } 6) \equiv 3(\text{mod } 6)$$

2324. $201672(\text{mod}3) = (2 \cdot 100\,000 + 0 \cdot 10\,000 + 1 \cdot 1\,000 + 6 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 2)(\text{mod}3) =$

$$= (2 \cdot (99\,9999 + 1) + 1 \cdot (999 + 1) + 6 \cdot (99 + 1) + 7 \cdot (9 + 1) + 2)(\text{mod}3) =$$

$$= (2 + 1 + 6 + 7 + 2)(\text{mod}3) \equiv 0(\text{mod}3)$$

2325. $a = n \cdot 7 + b$ och $c = m \cdot 7 + d \Rightarrow a + c = n \cdot 7 + b + m \cdot 7 + d \equiv (b + d)(\text{mod } 7)$

2401. a) $5, 11, 17, 23, 29$

b) $121, 110, 99, 88, 77$

c) $-78, -66, -54, -42, -30$

d) $-14, -1, 12, 25, 38$

2402. a) $25, 75, 125, 175, \cdots \Rightarrow a_n = 25 + (n-1)50 = -25 + 50n$

b) $-3, -12, -21, -30, \cdots \Rightarrow a_n = -3 - (n-1)9 = 6 - 9n$

c) $10\,000, 6000, 2000, -2000, \cdots \Rightarrow a_n = 10\,000 - (n-1)4000 = 14\,000 - 4000n$

d)

$$\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \cdots \Rightarrow a_n = \frac{1}{3} + (n-1)\frac{1}{3} = n\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$$

2403. a) $5, 10, 15, 20, \cdots, 5 + (n-1) \cdot 5 \Rightarrow a_{10} = 5 + 45 = 50$

b) $-3, -6, -9, -12, \cdots, -3 - 3(n-1) \Rightarrow a_9 = -3 - 3 \cdot 8 = -27$

c) $25, 12.5, 0, -12.5, \cdots, 25 - 12.5(n-1) \Rightarrow a_{10} = 25 - 12.5 \cdot 9 = -87.5$

d) $2 \cdot 10^4, 3 \cdot 10^4, 4 \cdot 10^4, \cdots, (n+1) \cdot 10^4 \Rightarrow a_{12} = 13 \cdot 10^4$

2404. a) $a_1 = 1, a_2 = 7, a_3 = 13, \ldots, a_n = 1 + (n-1) \cdot 6 = 6n - 5$

b) $a_1 = -1, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 11, a_5 = 15, \cdots, a_n = -1 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 5$

c) $a_1 = 52, a_2 = 36, a_3 = 20, a_4 = 4, \cdots, a_n = 52 - (n-1) \cdot 16 = 68 - 16n$

d) $a_1 =, a_2 =, a_3 = 50, a_4 = 17\frac{2}{3}, a_5 = -17\frac{2}{3}, a_6 = -50 \cdots, a_n = 50 - (n-3) \cdot 33\frac{1}{3} =$

$$= 50 - (n-3) \cdot 33\frac{1}{3} = 150 - n \cdot 33\frac{1}{3}$$

2405. Det största talet (1000) plus det minsta (1) ger 1001, det näst största plus det näst minsta ger 1001 och så håller det på. Totalt är det 500 par dvs $1001 \cdot 500 = 500\,500$

2406. a) $s = \frac{7}{2} \cdot (2 + 8) = 35$

b) $s = \frac{6}{2} \cdot (100 + 25) = 375$

c) $s = \frac{7}{2} \cdot (-11 + 13) = 7$

2407. a) $s_{10} = 5 \cdot 19 = 95$

b) $s_{12} = 6 \cdot 18 = 108$

2408. a) $r_n = 4 + 2(n-1)$

b) $4 + 2(n-1) = 28 \Rightarrow 2(n-1) = 24 \Rightarrow n = 13$

c) $r_{20} = 4 + 2(20-1) = 42 \Rightarrow s_{20} = \frac{20}{2}\big(4 + 4 + 2(20-1)\big) = 460$ rutor.

2409. $12 + n \cdot 6 = 444 \Rightarrow n = 72 \Rightarrow$ talföljden har 73 termer.

2410. A: $1 + n \cdot 1.5$
B: $1 - n \cdot 3$
C: Inte aritmetisk
D: Inte aritmetisk
E: Definitionen av aritmetisk talföljd. (felskrivning i bokens facit)

2411. a) 2, 5, 8, 11, 14, …, 98, 101, 104, 107, 110, …, 995, 998 dvs 900/3 tal varav hälften är jämna dvs 150 tal är delbara med 2.

b) Alla talen tillhör restklass 2 (mod3), inget tal är delbart med 3.

c) Då inget tal är delbart med 3 är heller inget tal delbart med 6.

2412. Antag att talen är: $a-4, a$ och $a+4$, de nya talen blir $a-2, a+3$ och $a+9$.

$$k = \frac{a+9}{a+3} = \frac{a+3}{a-2} \Rightarrow (a+9)(a-2) = (a+3)^2 \Rightarrow$$

$$a^2 + 7a - 18 = a^2 + 6a + 9 \Rightarrow 7a - 18 = 6a + 9 \Rightarrow a = 27$$

Talen är 23, 27 och 31.

2413. $7, 10, 13, \cdots, 121, 124 \Rightarrow \text{rad}(i) = 7 + (i-1)3 = 124 \Rightarrow i = 40 \text{ rader} \Rightarrow$

$$\text{totalt antal stolar} = \frac{1}{2} 40 \cdot (7 + 124) = 2\,620 \text{ stolar}$$

2414. $n = 1$ ger de två första udda talen $1 + 3 = 2^2$, OK, gäller då $n = 1$.

$$\sum_{i=0}^{n+1} 1 + 2i = \sum_{i=0}^{n} (1 + 2i) + 1 + 2(n+1) = (n+1)^2 + 1 + 2(n+1) =$$

$$= n^2 + 2n + 1 + 1 + 2n + 2 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 \text{ VSB}$$

2415.

$$\begin{cases} a-k+a+a+k=3 \\ \dfrac{(a-k)^2}{a^2}=\dfrac{a^2}{(a+k)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a=3 \\ (a-k)^2(a+k)^2=a^4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ (a-k)(a+k)=-a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a^2-k^2=-a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ k=\sqrt{2} \end{cases}$$

2416.

$$f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=2ax+b \Rightarrow f'(0)=b, f'(1)=2a+b, \cdots, f'(9) = 18a+b$$

$$\sum_{i=0}^{9} 2ax+b=\frac{1}{2}(b+18a+b)10=90a+10b$$

2417. a) $3, 12, 48, 192, 768 \Rightarrow a_n=3\cdot 4^{n-1}$

b) $-2, -4, -8, -16, -32 \Rightarrow a_n=-2^n$

c)

$$\frac{1}{1000}, \frac{1}{100}, \frac{1}{10}, 1, 10 \Rightarrow a_n=\frac{1}{1000}\cdot 10^{n-1}=10^{n-4}$$

d) $1, -2, 4, -8, 16 \Rightarrow a_n=(-2)^{n-1}$

2418. a) $25, 3\cdot 25, 9\cdot 25, 27\cdot 25 \ldots \Rightarrow a_n=25\cdot 3^{n-1}$

b) $-3, -12, -48, -192, \cdots = -3, -3\cdot 4, -3\cdot 16, -3\cdot 64, \cdots \Rightarrow a_n=-3\cdot 4^{n-1}$

c) $10\,000, 4000, 1600, 640, \cdots = 10\,000, 10\,000\cdot 0.4, 10\,000\cdot 0.4^2, 10\,000\cdot 0.4^3, \cdots =$

$$\Rightarrow a_n = 10\,000\cdot 0.4^{n-1}$$

d) $1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{8}, \cdots = 1, 1\cdot\sqrt{2}, 1\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2, 1\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3, \cdots \Rightarrow a_n = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}=2^{0.5n-0.5}$

2419. a) $a_n=5\cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_{10}=5\cdot 2^9=2560$

b) $a_n=-3\cdot(-2)^{n-1} \Rightarrow a_9=-3\cdot(-2)^8=-768$

c) $a_n=125\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow a_{10}=125\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{5^3}{5^9}=5^{-6}=6.4\cdot 10^{-5}$

d) $a_n=10^5\cdot(0.1)^{n-1} \Rightarrow a_{12}=\frac{10^5}{10^{11}}=10^{-6}$

2420. a) $7, 14, 21 \cdots \Rightarrow a_n=7+(n-1)\cdot 7=7n$

b) $7, 14, 28 \cdots \Rightarrow a_n=7\cdot 2^{n-1}$

2421. $4, -8, 16, -32 \cdots \Rightarrow a_n=4\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^{n+1} \Rightarrow a_{10}=(-2)^{11}=-2048$

2422. $s_{10} = 1000 + 1000 \cdot 1.045 + 1000 \cdot 1.045^2 + \cdots + 1000 \cdot 1.045^9 =$

$$= 1000 \cdot \frac{1.045^{10} - 1}{1.045 - 1} \approx 12\ 300 \text{ kr}$$

2423. a) $s_6 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = \frac{2^6-1}{2-1} = 62$

b) $s_5 = \frac{1.3^5-1}{1.3-1} \approx 9.0$

c) $s_{10} = \frac{3^{10}-1}{3-1} = 29\ 524$

2424. a) $a_0, 1, a_2, 16, \cdots = 0.25, 1, 4, 16, \cdots \Rightarrow a_n = 0.25 \cdot 4^n = 4^{n-1}$ eller

$$a_0, 1, a_2, 16, \cdots = -0.25, 1, -4, 16, \cdots \Rightarrow a_n = 0.25 \cdot (-4)^n = (-4)^{n-1}$$

b) $a_0, 1, a_2, a_3, a_4\ 16, \cdots = 0.5, 1, 2, 4, 8, 16, \cdots \Rightarrow a_n = 0.5 \cdot 2^n = 2^{n-1}$ eller

$$a_0, 1, a_2, a_3, a_4\ 16, \cdots = -0.5, 1, -2, 4, -8, 16, \cdots \Rightarrow a_n = 0.5 \cdot (-2)^n = (-2)^{n-1}$$

c) $a_0, a_1, a_2, 20, 5, \cdots = 1280, 320, 80, 20, 5, \cdots = 1280 \cdot 4^{-n} = 5 \cdot 4^{4-n}$

d) $a_0, a_1, a_2, 50, a_4, a_5, -6250 \cdots = -0.4, 2, -10, 50, -\ 250, 1250, -6250 = -0.4 \cdot (-5)^n =$

$$= \frac{2}{-5} \cdot (-5)^n = 2 \cdot (-5)^{n-1}$$

2425. Om man får 3 % ränta på insatt kapital och varje januari sätter in 8000 kr blir kontots saldo efter den fjärde insättningen:

$$8000 \frac{1.03^4 - 1}{1.03 - 1} \approx 33\ 500 \text{ kr}$$

2426.

$$45\ 000 = a \frac{1 - 1.07^6}{1 - 1.07} \Rightarrow a = 45\ 000 \cdot \frac{0.07}{1.07^6 - 1} \approx 6\ 300 \text{ kr}$$

Verkar vara fel i facit.

$$a + a1.07 + a1.07^2 + a1.07^3 + a1.07^4 + a1.07^5 + a1.07^6$$

2427.

$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \quad \cdots 3^n \quad 3^9 = 19683 \quad 3^{10} = 59049$$

a) 2 b) 0 c) 3

2428.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\left\{a\frac{1}{1-k}\text{ då } k<1\right\}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1$$

2429.

$$S_n=100\cdot\frac{1.05^{n+1}-1}{1.05-1}=5000\Rightarrow 1.05^{n+1}-1=50\cdot 0.05\Rightarrow n\approx 25\text{ år}$$

2430.

$$S_5=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$$

$$xS_5=x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$$

$$xS_5-S_5=S_5(x-1)=x^6-1\Rightarrow S_5=\frac{x^6-1}{x-1}$$

2431.

$$a^2+h^2+b^2+h^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\Rightarrow h^2=ab\text{ dvs}\frac{a}{h}=\frac{h}{b}$$

Om talföljden är a, h, b och kvoten mellan två följande tal i serien konstant är det en geometrisk serie.

2432. a) Då element $1=2$ och element $9=512=a\cdot k^8$ fås: $a=2$ och $k=2$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$a\cdot k$	$a\cdot k^2$	$a\cdot k^3$	$a\cdot k^4$	$a\cdot k^5$	$a\cdot k^6$	$a\cdot k^7$	$a\cdot k^8$
2	4	8	16	32	64	128	256	512

Ny talföljd:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}

Den nya talföljdens kvot $=\frac{1}{2}$

b) Ja, den nya talföljden börjar på a^{-1} och dess kvot blir k^{-1}.

2433. Låt serien vara $a,\ a\cdot k, a\cdot k^2, a\cdot k^3,\ a\cdot k^4$. Tag nu logaritmen av termerna:

$$\log a,\log(a\cdot k),\log(a\cdot k^2),\log(a\cdot k^3),\log(a\cdot k^4)\Rightarrow$$

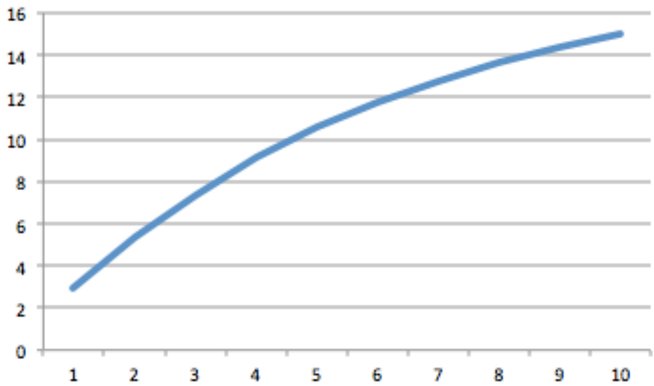
$$\log a,\log a+\log k,\log a+2\log k,\log a+3\log k,\log a+4\log k$$

Detta är en aritmetisk serie VSV.

2434. Då 10 doser givits har 9 timmar förflutit, dvs:

$$a + a \cdot k + a \cdot k^2 + \cdots + a \cdot k^9 = a \cdot \frac{k^{10} - 1}{k - 1} = 15 \text{ mg då } k = 0.84 \Rightarrow a = 2.9 \text{ mg}$$

Resonemanget leder till att patienten aldrig har mer än 15 mg i kroppen, därför är den första meningen i uppgiften något vilseledande.



2435. a) 3, 10, 17, 24

b) 1, 4, 10, 22

c) -1, -1, -1, -1

d) 0, 1, 2, 5

2436. a) $a_1 = 9, a_{n+1} = a_n + 4$

b) $a_1 = -4, a_{n+1} = a_n - 6$

c) $a_1 = 3, a_{n+1} = 2 \cdot a_n$

d) $a_1 = 10^{-8}, a_{n+1} = 100 \cdot a_n$

2437. a) $a_n = 2^{n-1}, 1, 2, 4, 8, \Rightarrow a_1 = 1, a_{n+1} = 2 \cdot a_n$

b) $b_n = 2 + 4(n-1), 2, 6, 10, \Rightarrow b_1 = 2, b_{n+1} = b_n + 4$

c) $c_n = 1^{n-1}, 1, 1, 1, \Rightarrow c_1 = 1, c_{n+1} = c_n$

d) $d_n = 27 - 7(n-1), 27, 20, 13, \Rightarrow d_1 = 27, d_{n+1} = d_n - 7$

2438. Frågan är något otydlig. Facit svarar på hur varje insättning av 10 000 kr förräntas.

Ett rekursivt uttryck gällande kapitalets värde ser ut som:

$$k_{n+1} = k_n \cdot 1.03 + 10\,000$$

Eller då den sista insättningen har ännu inte förräntat sig, men alla tidigare enligt:

$$k(n) = 10\,000 + 10\,000 \cdot 1.03 + 10\,000 \cdot 1.03^2 + \cdots + 10\,000 \cdot 1.03^n =$$

$$= 10\,000(1 + 1.03 + 1.03^2 + \cdots + 1.03^n) = 10\,000\frac{1.03^{n+1} - 1}{1.03 - 3}$$

2439. a)

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_2 = 2a, a_3 = 4a, a_4 = 8a, a_5 = 16a = 8 \Rightarrow a = 0.5$$

b)

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = k \cdot a_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_2 = 3k, a_3 = 3k^2, a_4 = 3k^3, a_5 = 3k^4 = \frac{3}{4} \Rightarrow k = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

c)

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + 12 \end{cases}$$

$$a_5 = a + 48 \Rightarrow 45 = \frac{5}{2}(a + a + 48) \Rightarrow a = -15$$

2440. a) $a_n = 2 + 8n$ och $a_n = a_{n-1} + 8$

b) $b_n = 1 - 2n$ och $b_n = b_{n-1} - 2$

c) $c_n = -200 + 100n$ och $c_n = c_{n-1} + 100$

2441. $a_{n+1} = a_n + d$ Nästa tal i följden är det förra talet ökat med *d*, det är definintionen av en aritmetisk talföljd.

2442. a) $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 24, a_4 = 120 = 5!$

b) $a_n = (n + 1)!$

2443. Skrivs uttrycket in i excel fås:

1	8	40
2,5	4,25	20,05
2,05	2,59558824	10,1247506
2,00060976	2,06833236	5,25991104
2,00000009	2,00112876	3,01019009
2	2,00000032	2,16950491
2	2	2,00662177
2	2	2,00001093
2	2	2
2	2	2

2444. $a_n = a_{n-1} + n \Rightarrow 120$ vinklar vid 20 strålar.

2445. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

2446. a) Ett A4 pappers area är $1/16\ \text{m}^2$ och förhållandet mellan längd och bredd är $\sqrt{2}$ dvs:

$$x \cdot \sqrt{2}x = \frac{1}{16} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{16\sqrt{2}} \Rightarrow x \approx 21 \text{ cm}$$

Svar: sidorna är 21.0 cm och 29.7 cm.

b) Arean hos A0=1 m^2, hos A1=0.5 m^2, hos A2=0.25 m^2 och hos An=0.5^n m^2.

2447. a)

$$\sum_{i=0}^{2}(i+1) = 1 + 2 + 3 = 6$$

b)

$$\sum_{k=-3}^{0}\frac{k}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

c)

$$\sum_{j=1}^{2} j^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

d)

$$\sum_{i=0}^{3} 10^i = 1 + 10 + 10^2 + 10^3 = 1 + 10 + 100 + 1000 = 1111$$

2448. a)

$$\sum_{i=0}^{5} 2^i$$

b)

$$\sum_{k=0}^{3} 3 \cdot 4^k$$

2449. a)

$$\sum_{k=0}^{20} 1 + 2k$$

b)

$$\sum_{k=1}^{32} 5k$$

2450.

$$A = \sum_{k=0}^{9} 10^k = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^9$$

$$B = \sum_{i=0}^{9} 10^i = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^9$$

$$C = \sum_{k=2}^{11} 10^i = 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{11}$$

$$D = \sum_{i=2}^{11} 10^{i-2} = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^9$$

A, *B* och *D* är identiska medan *C* är 100 gånger större.

2451.

$$\sum_{k=1}^{a} a_k + \sum_{k=a+1}^{b} a_k = a_1 + \cdots + a_a + a_{a+1} + \cdots + a_b = \sum_{k=1}^{b} a_k$$

2452. a)

$$\sum_{k=0}^{11} 6^k - \sum_{k=0}^{10} 6^k = 6^{11}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n+1}$$

2453. a)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
an	3	6	12	24	48	96	192	384	768
sn	3	9	21	45	93	189	381	765	1533

b) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

c)

$$s_n = 3 + 3\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \cdots + 3\cdot 2^{n-1} = 3(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) = 3\frac{2^n - 1}{1} =$$

$$= 3(2^n - 1)$$

2454.

$$A = \sum_{i=1}^{6} -(-2)^{i-1} = \sum_{i=0}^{5} -(-2)^i$$

$$B = -\sum_{i=0}^{6} 1 + \frac{i}{3}$$

2501. För $n = 0$ gäller uttrycket. Ansätt $n = k + 1$:

$$a_{k+1} = a_k + 5 = 3 + 5k + 5 = 3 + 5(k+1)$$

Enligt induktionsaxiomet gäller uttrycket för alla n.

2502. a) För $n = 1$ gäller uttrycket. Ansätt $n = k + 1$:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + \big(1 + 2(k-1)\big) + \big(1 + 2(k+1-1)\big) = k^2 + 1 + 2k = (k+1)^2$$

Enligt induktionsaxiomet gäller uttrycket för alla n.

b) För $n = 1$ gäller uttrycket, $100 = 105 - 5$. Ansätt $n = k + 1$:

$$100 + 90 + 80 + \cdots + \big(100 - 10(k-1)\big) + \big(100 - 10(k+1-1)\big) =$$

$$= 105k - 5k^2 + 100 - 10k = 105k + 105 - 5k^2 - 5 - 10k =$$

$$= 105(k+1) - 5(k+1)^2$$

Enligt induktionsaxiomet gäller uttrycket för alla n.

2503. För $n = 1$ gäller uttrycket. Ansätt $n = k + 1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} 2i = \sum_{i=1}^{k} 2i + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$$

Enligt induktionsaxiomet gäller uttrycket för alla n.

2504. För $n = 1$ gäller uttrycket. Ansätt $n = k + 1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} 6i - 2 = \sum_{i=1}^{k} (6i - 2) + 6(k+1) - 2 = k(3k+1) + 6k + 4 =$$

$$= 3k^2 + k + 6k + 4 = 3k^2 + 7k + 4 = (k+1)(3k+4) = (k+1)(3(k+1)+1)$$

Enligt induktionsaxiomet gäller uttrycket för alla n.

2505. Diagonaler i en n-hörning har mening då $n \geq 4$.

$$a_4 = \frac{4 \cdot (4-3)}{2} = 2$$

Uttrycket gäller för $n = 4$.

När en n-hörning utökas med ett nytt hörn ökar diagonalerna med $n + 1 - 2$ dvs

$$a_{n+1} = a_n + (n+1) - 2 = \frac{n(n-3)}{2} + \frac{2n-1}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2n - 1}{2} =$$

$$= \frac{n^2 - n - 1}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} = \frac{(n+1)\big((n+1)-3\big)}{2}$$

Enligt induktionsaxiomet gäller uttrycket för alla n.

2506. För $n = 1$ gäller att: $11^1 - 4^1 = 11 - 4 = 7$ är delbart med 7.

Dvs uttrycket gäller för $n = 1$. Prova om uttrycket kan anses gälla för $n + 1$.

$$11^{n+1} - 4^{n+1} = 11 \cdot 11^n - 4 \cdot 11^n + 4 \cdot 11^n - 4 \cdot 4^n =$$

$$= 7 \cdot 11^n + 4(11^n - 4^n) \text{ delbart med 7 VSV}$$

Enlig induktionsaxiomet är uttrycket delbart med 7 för alla heltal $n \geq 1$.

2507. a) För $n = 1$ gäller att:

$$1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$$

Dvs uttrycket gäller för $n = 1$. Prova om uttrycket kan anses gälla för $n + 1$.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2) =$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{3(n+1)(n+2)}{3} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \text{ VSB}$$

Enlig induktionsaxiomet gäller uttrycket för alla heltal $n \geq 1$.

b) För $n = 1$ gäller att:

$$\frac{1}{(3-2)(3+1)} = \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \cdot 1 + 1}$$

Dvs uttrycket gäller för $n = 1$. Prova om uttrycket kan anses gälla för $n + 1$.

$$\frac{1}{(3-2)(3+1)} + \frac{1}{(3 \cdot 2 - 2)(3 \cdot 2 + 1)} + \cdots + \frac{1}{(3 \cdot n - 2)(3 \cdot n + 1)} +$$

$$+ \frac{1}{(3 \cdot (n+1) - 2)(3 \cdot (n+1) + 1)} = \frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} =$$

$$= \frac{n(3n+4)+1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{(3n+1)(n+1)}{(3n+1)(3(n+1)+1)} =$$

$$= \frac{n+1}{3(n+1)+1} \text{ VSB}$$

Enlig induktionsaxiomet gäller uttrycket för alla heltal $n \geq 1$.

2508. a)

$$\ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{i}\right) = \ln \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{i}\right) = \ln \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{i+1}{i}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\ln(i+1) - \ln i] =$$

$$= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln n + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1)$$

b) Prova några summor:

1	2	3	4	n (kanske?)
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}$	$\frac{n}{n+1}$

Testa vad summan blir med $n+1$ termer:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}\text{ VSB}$$

2509. Rita några linjer på ett papper och räkna antalet områden som begränsas:

1	2	3	4	5	n (kanske?)
2	4	7	11	16	$a_n = a_{n-1}+n$

Med lite tur hittar man:

$$a_n=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

Uttrycket ser ut att följa serien. Gäller den för alla *n*? Sätt $n=k+1$:

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}((k+1)^2+k+1+2)=\frac{1}{2}(k^2+2k+1+k+1+2)=$$

$$=\frac{1}{2}(k^2+k+2+2k+2)=\frac{1}{2}(k^2+k+2)+k+1=a_k+k+1$$

Enlig induktionsaxiomet gäller uttrycket för alla heltal $n\geq 1$.

2510. Testa med $n=0, \Rightarrow (1+x)^0\geq 1$, stämmer. Ta nu $n+1$.

$$(1+x)^{n+1}=(1+x)(1+x)^n\geq(1+x)(1+nx)=1+x+nx+nx^2$$
$$=1+(n+1)x+nx^2$$

dvs

$$(1+x)^{n+1}\geq 1+(n+1)x\text{ VSB}$$

Enligt induktionsaxiomet gäller då uttrycket för alla $n\in N$ och $x>0$.

2511. Testa med $n = 1$, $1^3 + 2 = 3$, OK delbart med 3. Prova nu $n + 1$

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3 =$$

$$= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$$

Delbart med 3, enligt induktionsaxiomet är då uttrycket alltid delbart med 3 VSB.

Test 2

1. $3|123$, 1732 är jämnt, 2671 är primtal, $3|3975$

2. Både 28 och 6032 är delbara med 4, dvs summan är delbar med 4.

3.Kvot$=$ 6 rest $= 1$.

4. 15

5. a) $66(\text{mod } 9) \equiv 3(\text{mod } 9)$ b) $17(\text{mod } 5) \equiv 2(\text{mod } 5)$

c) $11(\text{mod } 7) \equiv 4(\text{mod } 7)$

6. $428934(\text{mod}11) \equiv (4 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4)(\text{mod}11) \equiv$

$$\equiv (4 \cdot (-1)^5 + 2 + 8 \cdot (-1)^3 + 9 + 3 \cdot (-1) + 4)(\text{mod}11) \equiv$$

$$\equiv (-4 + 2 - 8 + 9 - 3 + 4)(\text{mod}11) \equiv (-4 + 2 - 8 + 9 - 3 + 4)(\text{mod}11) \equiv 0(\text{mod}11)$$

7. $2 + 4 + 6 + \cdots + 198 + 200 = (2 + 200) + (4 + 198) + \cdots + (100 + 102) = 50 \cdot 202 = 10100$

8. $a_2 = 3 = ck^2, a_4 = 0.75ck^4 \Rightarrow \frac{3}{0.75} = \frac{ck^2}{ck^4} \Rightarrow k^2 = \frac{0.75}{3} = 0.25 \Rightarrow k = 0.5, c = 12 \Rightarrow a_1 = 6$

$$a_i = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i \text{, Bokens svar är märkligt.}$$

9.

$$z_1 = z_0^2 + (1 + i) = 1 + i$$

$$z_2 = z_1^2 + (1 + i) = (1 + i)^2 + 1 + i = 1 + 2i - 1 + 1 + i = 1 + 3i$$

$$z_3 = z_2^2 + (1 + i) = (1 + 3i)^2 + 1 + i = 1 + 6i - 9 + 1 + i = -7 + 7i$$

10.

$$a_1 = 2a_0 + 1 = 3 = 2^{1+1} - 1 = 3 \text{ OK}$$

$$a_{n+1} = 2^{n+2} - 1 = 2 \cdot 2^{n+1} - 2 + 2 - 1 = 2(2^{n+1} - 1) + 1 = 2a_n + 1 \text{ VSV}$$

11. Tryck på räknaren.

$$22\ 320 = 9 \cdot 80 \cdot 31 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 31$$

12. De 4 första primtalen är 2, 3, 5 och 7:

$$2^2 - 1 = 5, 2^3 - 1 = 7, 2^5 - 1 = 31, 2^7 - 1 = 127 \text{ VSV}$$

13.

$$\frac{23450}{48} = 488 + \frac{26}{48}, 26 \text{ eller } 74 \text{ t. ex.}$$

14.
$2522 = 2047 \cdot 1 + 475$
$2047 = 475 \cdot 4 + 147$
$475 = 147 \cdot 3 + 34$
$147 = 34 \cdot 4 + 11$
$34 = 11 \cdot 3 + 1$

15. $6754 \equiv 3718(\text{mod } 33) \Rightarrow 6754(\text{mod } 33) = 22 \text{ och } 3718(\text{mod } 33) = 22 \Rightarrow \text{JA}$

16.

$$80\ 000 \cdot 0.08 + 8\ 000 + 72\ 000 \cdot 0.08 + 8\ 000 + \cdots 8\ 000 \cdot 0.08 + 8000 =$$

$$= 0.08 \sum_{n=0}^{9} (80\ 000 - n \cdot 8\ 000) + 80\ 000 =$$

$$= 0.08 \cdot \frac{10}{2}(80\ 000 + 8000) + 80\ 000 = 35\ 200 + 80\ 000$$

17. a)

$$\frac{11\ 000}{10\ 000} = 1.1, \frac{12\ 100}{11\ 000} = 1.1 \Rightarrow \text{geometrisk serie}$$

b) Nej

c) $\frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{geometrisk serie}$

d) Aritmetisk talföljd med $d = 11$

18. Antalet insättningar blir 28. Den första insättningen har genererat $1000 \cdot 1.03^{28}$ kr, den andra $1000 \cdot 1.03^{27}$ kr dvs totalt:

$$\sum_{i=1}^{28} 1000 \cdot 1.03^{28} = 1000 \cdot \frac{1.03^{29} - 1}{1.03 - 1} \approx 45\ 200 \text{ kr}$$

19. $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \Rightarrow$ och $a_0 = 1$ ger med hjälp av excel:

n	rot(1+a_n)
0	1,000000
1	1,414214
2	1,553774
3	1,598053
4	1,611848
5	1,616121
6	1,617443
7	1,617851
8	1,617978
9	1,618017
10	1,618029
11	1,618032
12	1,618033
13	1,618034
14	1,618034

20. Visa först att uttrycket gäller då $n = 1$ dvs:

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2} \text{ OK}$$

Låt sedan summan gå till $n + 1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2(n+2)}{2 \cdot 2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} =$$

$$= 2 - \frac{2(n+2) - n - 1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}} \text{ VSV}$$

Enligt induktionsaxiomet gäller uttrycket för alla positiva heltal n.

Blandade uppgifter 2

1.

101	103	107	109	113
127	131	137	139	149
151	157	163	167	173
179	181	191	193	197
199				

2. Bara 1287. För att $1 + 2 + 8 + 7 = 18$ är delbart med 3.

3. a) $327 = 3 \cdot 109$ b) $1890 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ c) $1287 = 9 \cdot 11 \cdot 13$

d) $2048 = 2^{11}$

4. a)

$$\frac{2}{105} - \frac{5}{77} = \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{5}{7 \cdot 11} = \frac{2 \cdot 11}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} =$$

$$= \frac{22}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} - \frac{75}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} = -\frac{53}{33 \cdot 35} = -\frac{53}{1155}$$

b)

$$\frac{7}{990} + \frac{5}{231} = \frac{7}{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11} + \frac{5}{3 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{7 \cdot 7}{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11} =$$

$$= \frac{7 \cdot 7 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 7} = \frac{199}{6930}$$

5. Jämna tal som är delbara med 3, är delbara med 6.

6. a) $\frac{3}{11} \approx 0.272727 = 0.\overline{27}$

b) $\frac{8}{7} = 1.\overline{142857}$

c) $\frac{5}{17} =$

7. a)

$$0.275 = \frac{275}{1000} = \frac{5^2 \cdot 11}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{11}{40}$$

b)

$$a = 0.384615384, 10^6 a = 384615.384615 \Rightarrow 10^6 a - a = 384615 \Rightarrow$$

$$a = \frac{384615}{999\,999} = \frac{9 \cdot 42\,735}{9 \cdot 111\,111} = \frac{42\,735}{111\,111} = \frac{11 \cdot 3885}{11 \cdot 10101} = \frac{3 \cdot 1295}{3 \cdot 3367} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 37}{37 \cdot 91} = \frac{35}{91} = \frac{5}{13}$$

c) $a = 0.2462462, 1000\mathrm{a} = 246.2462 \Rightarrow 1000a - a = 999a = 246 \Rightarrow$

$$a = \frac{246}{999} = \frac{3 \cdot 82}{3 \cdot 333} = \frac{82}{333}$$

8. a) $\mathrm{SGD}(924,990)$

$$990 = 1 \cdot 924 + 66$$

$$924 = 66 \cdot 14 + 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{SGD}(924,990) = 66$$

b) $\mathrm{SGD}(366,782)$

$$782 = 2 \cdot 366 + 50$$

$$366 = 7 \cdot 50 + 16$$

$$50 = 3 \cdot 16 + 2$$

$$16 = 2 \cdot 8 + 0$$

$$\mathrm{SGD}(366{,}782) = 2$$

c) SGD(211,516)

$$516 = 2 \cdot 211 + 94$$

$$211 = 2 \cdot 94 + 23$$

$$94 = 4 \cdot 23 + 2$$

$$23 = 2 \cdot 11 + 1$$

$$\mathrm{SGD}(211{,}516) = 1$$

d) SGD(97461,19635)

$$97461 = 4 \cdot 19635 + 18921$$

$$19635 = 1 \cdot 18921 + 714$$

$$18921 = 26 \cdot 714 + 357$$

$$714 = 2 \cdot 357 + 0$$

$$\mathrm{SGD}(97461{,}19635) = 357$$

9. a) $a_5 = 3 \cdot 5 - 1 = 14$ b) $a_5 = 5^2 - 5 = 20$

c) $a_5 = \frac{5^2+1}{5^2-1} = \frac{26}{24} = \frac{13}{12}$ d) $a_5 = \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$

10. a) $a_n = -1 + 3(n-1) = 3n - 4$

b) $a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = \frac{3}{4}, \cdots a_n = \frac{n+1}{n+2}$

c) $a_n = 3^n$

d) $a_n = 3.14 + 0.08(n-1) = 3.06 + 0.08n$

11. a) $a_n = 26 - 4(n-1) \Rightarrow a_{17} = 26 - 4 \cdot 16 = -38$

b) $a_1 = -8, a_4 = -2 \Rightarrow a_2 = -6, a_3 = -4 \Rightarrow a_n = -8 + 2(n-1) \Rightarrow a_{17} = 24$

c) $a_{15} = 2872, a_{19} = 3418 \Rightarrow a_{16} = 2872 + 136.5,\ a_{17} = 2872 + 273 = 3145$

12. a) $a_6 = a_1 + 5 \cdot 6 = 42$

b) $a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8$

c) $a_6 = a_1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{32} = \frac{3}{64}$

13. a) $a_1 = 1, a_2 = 5 \Rightarrow a_3 = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 = 11, a_4 = 3 \cdot 11 - 4 \cdot 5 = 13,$

$$a_5 = 3 \cdot 13 - 4 \cdot 11 = -5$$

b) $a_1 = 5, a_2 = -3, a_3 = 7 \Rightarrow a_4 = 2 \cdot a_3 - a_2 - 3 \cdot a_1 = 2 \cdot 7 - (-3) - 3 \cdot 5 = 2$

$$a_5 = 2 \cdot a_4 - a_3 - 3 \cdot a_2 = 2 \cdot 2 - 7 - 3 \cdot (-3) = 6$$

$$a_6 = 2 \cdot a_5 - a_4 - 3 \cdot a_3 = 2 \cdot 6 - 2 - 3 \cdot 7 = -11$$

14. a) $a_n = 100(-1)^n$ dvs geometrisk.

b) $a_n = -100 + 200(n-1) = 200n - 300$ dvs aritmetisk.

c) $a_n = -100 \cdot 0.9^n$ dvs geometrisk.

d) Då 0 är med blir det varken eller.

e) $b_n = 5a + 3 + (n-1)(a+2) = 4a + 1 + na + n2 = 4a + 1 + n(a+2)$ dvs aritmetisk.

f) $a_n = e^{nx}$ dvs geometrisk.

15.

$$3 + 12n = 2 + 7m \Rightarrow n = \frac{7}{12}m - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}(7m - 1)$$

$$(m, n) = (7,4), (19,11), (31,18), (43,25)$$

Dvs 51, 135, 219, 303, …

16. $a_0 = 120\,000, a_n = 0.975 \cdot a_{n-1} + 4000$

Använd excel eller något annat digitalt verktyg.

17. $a_0 = 30000, a_n = 0.9a_{n-1} + 1000$, 12 år.

a0	30000
F2*0,9+1000	28000
1	26200
2	24580
3	23122
4	21809,8
5	20628,82
6	19565,938
7	18609,3442
8	17748,4098
9	16973,5688
10	16276,2119
11	15648,5907
12	15083,7317
	14575,3585

18. a) $a_0 = 800, a_1 = 400, a_2 = 200, a_3 = 100, a_4 = 50, a_5 = 25, a_6 = 12.5$

b) $a_n = 800 \cdot 0.5^n$

c) $800 \cdot 0.5^n = 0.1 \Rightarrow n \approx 13$ dygn

19. a) $a_n = \sqrt{2n}$ b) $a_n = \sqrt{2^n} = 2^{\frac{n}{2}}$

c) $\lg 1, \lg 10, \lg 100, \lg 1000 \cdots = 0, 1, 2, 3 \cdots \Rightarrow a_n = n - 1$

d) $a - b, a, a + b, a + 2b \cdots \Rightarrow a_n = a + (n - 2)b$

20. $abc = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = (b - 2) \cdot 100 + b \cdot 10 + c$

$$\frac{(b-2) \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{b} = 71 + \frac{3}{b} \Rightarrow$$

$$110b - 200 + c = 71b + 3 \Rightarrow 39b + c = 203 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \\ c = 8 \end{cases}$$

Svar: talet är 358

21. Det är fel i uppgiften. Skall troligen vara $n(\text{mod}9) \equiv 5$.

a) 14 b) -4

22. Talet $\frac{a+b}{2}$ ligger mitt mellan a och b dvs avstånden $a \leftrightarrow \frac{a+b}{2} \leftrightarrow b$ är lika och serien är aritmetisk.

23. Kvoten är:

$$\frac{b}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{a}$$

24. $a, x, b, 2x$, då serien är aritmetisk måste *b* ligga mitt mellan *x* och 2*x* dvs $b = \frac{3x}{2}$. På samma sätt måste då $a = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3x}{2} \cdot \frac{2}{x} = 3$

25.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = k \Rightarrow \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 = \left(\frac{a_3}{a_2}\right)^2 = k^2 \text{ VSB}$$

26. $a_n = 84 + n \cdot 7$

27.

$$\frac{a^3b^6}{a^2b^3} = ab^3 \Rightarrow c_{20} = ab^3 \cdot (ab^3)^{20} = a^{21}b^{63}$$

(verkar vara fel i facit)

28. Visa att $2^{n-1} \leq n!$. Testa med t.ex. $n = 1$, $2^0 = 1 \leq 1! = 1$ OK.
Kolla med $n + 1$ dvs $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \leq 2 \cdot n! \leq (n+1)!$ VSB
Enligt induktionsaxiomet gäller då uttrycket för alla *n*.

29. a)

$$13^3 - 13 = (12+1)^3 - 13 = 12^3 + 3 \cdot 12^2 + 3 \cdot 12 + 1 - 13 =$$

$$= 12^3 + 3 \cdot 12^2 + 3 \cdot 12 - 12 \text{ VSB}$$

Eller:

$$13^3 - 13 = 13(13^2 - 1) = 13(13+1)(13-1) = 13 \cdot 14 \cdot 12 \text{ VSB}$$

b)

$$5876332^3(\text{mod}6) - 5876332(\text{mod}6) = 4^3(\text{mod}6) - 4(\text{mod}6) =$$

$$= 4(\text{mod}6) - 4(\text{mod}6) = 0$$

Eller:

$$5876332(5876332^2 - 1)(\text{mod}6) = 5876332(5876332 - 1)(5876332 + 1)(\text{mod}6) = 0$$

c) $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1) \Rightarrow$ för alla n

30.

$$\begin{cases} a = 4 + k \\ am = 4 + 2k \\ am^2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 + k \\ am = 4 + 2k \\ a^2m^2 = 18a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 + k \\ a^2m^2 = (4+2k)^2 \\ a^2m^2 = 18a \end{cases} \Rightarrow 18(4+k) = (4+2k)^2$$

$$\Rightarrow 72+18k=16+16k+4k^2 \Rightarrow 0=-56-2k+4k^2 \Rightarrow k^2-\frac{1}{2}k-14=0$$

$$\Rightarrow k=\frac{1}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+14}=\frac{1}{4}\pm\frac{15}{4}=\begin{cases}k_1=4\\k_2=-3.5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=8\\a_2=0.5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m_1=1.5\\m_2=-6\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=8\\y_1=12\end{cases}\text{eller }\begin{cases}x_1=0.5\\y_1=-3\end{cases}$$

31. $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_7=\{a+i\cdot k\}=a, a+k, a+2k, \cdots, a+7k$

$$\begin{cases}a+a+6k=40\\a\cdot(a+3k)=160\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+3k=20\\a\cdot(a+3k)=160\end{cases}\Rightarrow a\cdot 20=160\Rightarrow\begin{cases}a=8\\k=4\end{cases}$$

Talföljden blir: $8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36$

32. Gäller för $n=1$,

$$n+1\Rightarrow 1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+\frac{3(n+1)(n+2)}{2\cdot 3}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}\text{ VSB}$$

33. Gäller för $n=1$,

$$n+1\Rightarrow 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$$
$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{4(n+1)^3}{4}$$

$$=\frac{(n+1)^2\big(n^2+4(n+1)\big)}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\text{ VSB}$$

34.

$$Dx^n=\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}, \text{gäller då } n=1$$

$$n+1\Rightarrow\frac{d}{dx}x^{n+1}=\frac{d}{dx}(x\cdot x^n)=\{\text{derivatan av en produkt}\}=x\cdot\frac{d}{dx}x^n+x^n\frac{d}{dx}x=$$

$$=x\cdot nx^{n-1}+x^n=nx^n+x^n=(n+1)x^n\text{ VSB}$$

35. Använd excel eller annat digitalt verktyg.
a)

$$a_n = a_{n-1} + 0.10a_{n-1}\left(1 - \frac{a_{n-1}}{4500}\right) = 1.1a_{n-1} - \frac{a_{n-1}^2}{45\,000}$$

Det planteras ut $a_n = 400$ fiskar.

b) När antalet är 4500 blir ökningen $= 0$.

c) $a_{10} \approx 920$ fiskar.

d)

$$a_n = a_{n-1} + 0.10a_{n-1}\left(1 - \frac{a_{n-1}}{4500}\right) - 25$$

(formeln i facit är fel)

e) $a_{10} \approx 570$ fiskar (566).

f) Cirka 4200 fiskar.

g)

$$a_n = a_{n-1} + 0.10a_{n-1}\left(1 - \frac{a_{n-1}}{4500}\right) + 175$$

h) $a_{10} \approx 3000$ fiskar (3027).

i) Cirka 5800 fiskar.

36. a) Uttrycket gäller för $n = 1$.

$$a^{n+1} - b^{n+1} = a \cdot a^n - b \cdot b^n = a \cdot a^n - a \cdot b^n + a \cdot b^n - b \cdot b^n$$
$$= a \cdot (a^n - b^n) + (a - b) \cdot b^n$$

b) Gäller för $n = 1$,

$$a^{2(n+1)} - b^{2(n+1)} = a^2a^{2n} - b^2b^{2n} = a^2a^{2n} - a^2b^{2n} + a^2b^{2n} - b^2b^{2n} =$$

$$= a^2(a^{2n} - b^{2n}) + (a^2 - b^2)b^{2n} = a^2(a^{2n} - b^{2n}) + (a - b)(a + b)b^{2n}$$