

Matematik 5 svar

Kapitel 3	1
Test 3.....	15
Blandade uppgifter	17

Kapitel 3

3101. a) $y'(x) = -2x \Rightarrow y(x) = -x^2 + C$

b) $y'(x) = x^2 - x + 1 \Rightarrow y(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$

c) $y' - x^2 + 2 = 0 \Rightarrow y' = x^2 - 2 \Rightarrow y(x) = \frac{x^3}{3} - 2x + C$

d) $\frac{1}{2}y' - x + x^3 = 1 \Rightarrow y' = 2x - 2x^3 + 2 \Rightarrow y(x) = x^2 - \frac{x^4}{2} + 2x + C$

e) $y'(x) = \frac{4}{e^{2x}} = 4e^{-2x} \Rightarrow y(x) = -2e^{-2x} + C = -\frac{2}{e^{2x}} + C$

f) $y'(x) = 2 \cos \frac{x}{2} \Rightarrow y(x) = 4 \sin \frac{x}{2} + C$

3102. a) $y''(x) = -3x + 1 \Rightarrow y'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + C \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{x^2}{2} + Cx + D$

b) $y''(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = C \Rightarrow y(x) = Cx + D$

c) $y''(x) = 8e^{2x} \Rightarrow y'(x) = 4e^{2x} + C \Rightarrow y(x) = 2e^{2x} + Cx + D$

d) $y''(x) = -4 \sin x \Rightarrow y'(x) = 4 \cos x + C \Rightarrow y(x) = 4 \sin x + Cx + D$

e) $y''(x) = 18\sqrt{x} = 18x^{1/2} \Rightarrow y'(x) = 12x^{3/2} + C \Rightarrow y(x) = \frac{24}{5}x^{5/2} + Cx + D$

f) $y''(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow y'(x) = -\frac{1}{x} + C \Rightarrow y(x) = -\ln|x| + Cx + D$

3103. a) $\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow y(x) = x^2 + C$

b) $\frac{dy}{dx} = 4 \cdot e^{2x} \Rightarrow y(x) = 2 \cdot e^{2x} + C$

c) $\frac{dy}{dt} = \frac{2}{t} \Rightarrow y(t) = 2 \ln|t| + C$

$$d) \frac{dy}{dt} = 4 \sin 2t \Rightarrow y(x) = -2 \cos 2t + C$$

$$3104. a) y'(x) = 2 \Rightarrow y(x) = 2x + C \text{ och } y(3) = 10 \Rightarrow y(x) = 2x + 4$$

$$b) y'(x) = 4x + 3 \Rightarrow y(x) = 2x^2 + 3x + C \text{ och } y(1) = 10 \Rightarrow y(x) = 2x^2 + 3x + 5$$

$$c) y'(x) = e^x + 1 \Rightarrow y(x) = e^x + x + C \text{ och } y(1) = e \Rightarrow y(x) = e^x + x - 1$$

$$d) y'(x) = \cos x - \sin x \Rightarrow y(x) = \sin x + \cos x + C \text{ och } y(0) = 1$$

$$\Rightarrow y(x) = \sin x + \cos x$$

$$e) y''(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = C \Rightarrow y(x) = Cx + D \text{ och } y(0) = 3, y(1) = 5$$

$$\Rightarrow y(x) = 2x + 3$$

$$f) y''(x) = 2 \Rightarrow y'(x) = 2x + C \Rightarrow y(x) = x^2 + Cx + D \text{ och } y(0) = 1, y'(3) = 4$$

$$\Rightarrow y(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$3105. y(x) = 1 + \cos x \Rightarrow y'(x) = -\sin x$$

$$y' \cos x + y \sin x = -\sin x \cos x + (1 + \cos x) \sin x = \sin x \text{ VSV}$$

$$3106. y(x) = x - 1 + Ce^{-x} \Rightarrow y'(x) = 1 - Ce^{-x}$$

$$x - y = x - (x - 1 + Ce^{-x}) = 1 - Ce^{-x} = y'(x)$$

$$3107. y'(x) = 2x + 1 \Rightarrow y(x) = x^2 + x + C \text{ men } y(2) = 1 \Rightarrow y(x) = x^2 + x - 5$$

$$3108. y'(x) = 2e^x \Rightarrow y(x) = 2e^x + C \text{ men } y(1) = 2 = 2e + C = 2e + 2 - 2e \Rightarrow$$

$$y(x) = 2e^x - 2e + 2$$

$$3110. y'(x) = \sin x \Rightarrow y(x) = -\cos x + C, y(2\pi) = C - \cos 2\pi = 4 \Rightarrow C = 5$$

$$\text{Svar: } y(x) = 5 - \cos x$$

3111.

$$y'(x) = 2e^x + e^{x/2} \Rightarrow y(x) = 2e^x + 2e^{x/2} + C$$

$$y(2) - y(1) = 2e^2 + 2e + C - 2e - 2\sqrt{e} - C = 2e^2 - 2\sqrt{e}$$

$$3112. a) y'(x)\sqrt{x} + 1 = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow y(x) = -2\sqrt{x} + C, y(4) = 0 \Rightarrow C = 4$$

$$\text{Svar: } y(x) = 4 - 2\sqrt{x}$$

$$b) y'(x)e^{2x} = 4 \Rightarrow y'(x) = 4e^{-2x} \Rightarrow y(x) = -2e^{-2x} + C, y(0) = 0 \Rightarrow C = 2$$

Svar: $y(x) = 2 - 2e^{-2x}$

c) $y''(x) = 12x^2 + 8 \Rightarrow y'(x) = 4x^3 + 8x + C_1 \Rightarrow y(x) = x^4 + 4x^2 + C_1x + C_2$

$$\begin{cases} 2 = C_2 \\ 10 = 1 + 4 + C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 2 \\ C_1 = 3 \end{cases}$$

Svar: $y(x) = x^4 + 4x^2 + 3x + 2$

d) $y''(x) = x^{-2} \Rightarrow y'(x) = -x^{-1} + C_1, y'(1) = -1 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow y'(x) = -x^{-1}$

$$y(x) = -\ln x + C_2, y(1) = 4 \Rightarrow C_2 = 4$$

Svar: $y(x) = 4 - \ln x$

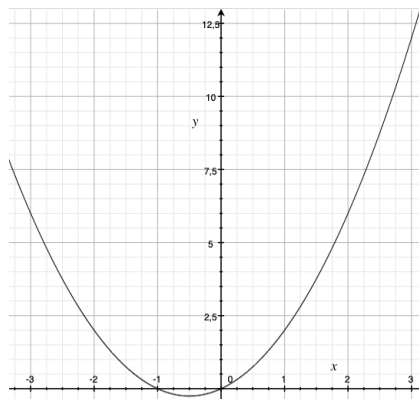
3113. $y(x) = 2x + 3 \Rightarrow y'(x) = 2, y(0) = 3$

3114. $y(x) = x^3 + 3x + 7 \Rightarrow y'(x) = 3x^2 + 3 \Rightarrow y''(x) = 6x = f(x)$

3115. a) $y'(x) = 2x + 1 \Rightarrow y(x) = x^2 + x + C$ vidare gäller

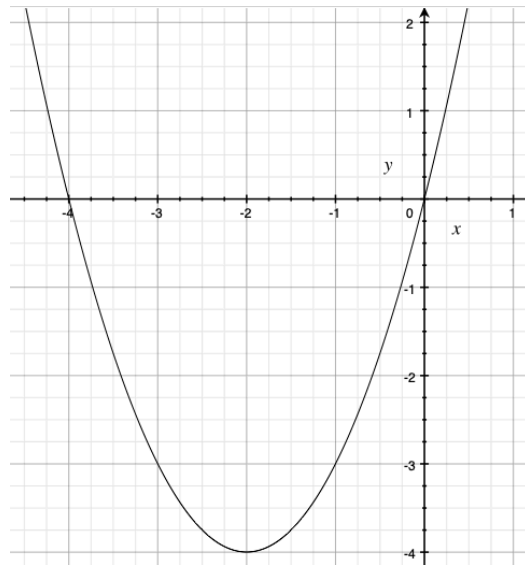
$$2 = 1^2 + 1 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y(x) = x^2 + x$$

b)



3116. $y(0) = 0$ och $y'(0) = 4$

$$y''(x) = 2 \Rightarrow y'(x) = 2x + A = 2x + 4 \Rightarrow y(x) = x^2 + 4x + B = x^2 + 4x$$



3207.

$$y(x) = 2e^{-3x} \Rightarrow y'(x) = -6e^{-3x}$$

Ekvationen kan till exempel vara: $y'(x) = -3y(x)$, $y(0) = 2$

3208.

$$y'(x) = \frac{1}{5}y(x) \Rightarrow y(x) = Ce^{x/5}, y(0) = 2 \Rightarrow y(x) = 2e^{x/5}$$

3209.

$$4f'(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = Ce^{\frac{x}{4}}, f(0) = 2 \Rightarrow f(x) = 2e^{\frac{x}{4}}$$

3210.

$$2y'(x) + 3y(x) = 0 \Rightarrow y'(x) + \frac{3}{2}y(x) = 0 \Rightarrow y(x) = K \cdot e^{-\frac{3x}{2}}$$

Dvs bara kurva A och kurva C kan vara lösningar. I fallet C gäller $K < 0$.

3211.

3212. a)

$$\frac{dN}{dt} = kN \text{ dvs } N(t) = N_0 e^{kt}$$

b) $N(t) = N_0 e^{0.54t}$

c) $e^{0.54t} = 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0.54} \approx 1.3 \text{ h}$

3213. a) $\frac{dN}{dt} = N(t) \Rightarrow N(t) = 180 \cdot e^{2.07t}$

$$\text{b) } t = \frac{1}{2.07} \ln \frac{1000}{180} \approx 50 \text{ min}$$

c) då antalet organismer är många i förhållande till kärlets storlek

$$3216. \text{ a) } \frac{dK}{dt} = -6.93 \cdot 10^{-3} K \Rightarrow K(t) = 0.2e^{-6.93 \cdot 10^{-3} t} \text{ M}$$

$$\text{b) } K(400) = 0.2e^{-6.93 \cdot 10^{-3} \cdot 400} \text{ M} \approx 0.0125 \text{ M}$$

3217.

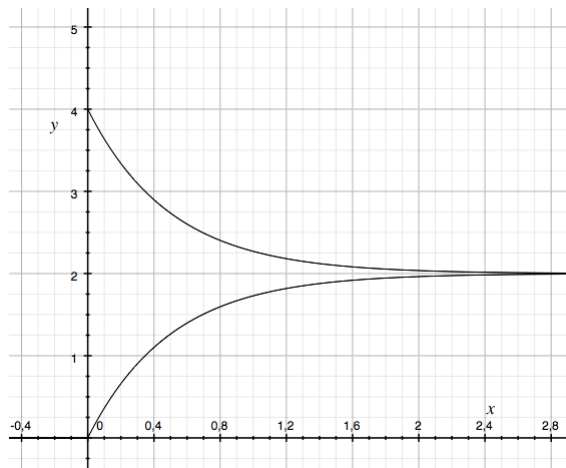
$$\frac{dy}{dt} = -0.012 \cdot y \Rightarrow y(t) = 4.8e^{-0.012t}$$

3306.

b) $v(t) = 2 - 2e^{-2t}$, $v'(t) = 4e^{-2t}$, $v(0) = 0$ sätt in i ursprunglig ekvation:

$$4e^{-2t} = 4 - 2(2 - 2e^{-2t}) = 4 - 4 + 4e^{-2t} = 4e^{-2t}$$

c) Om $v(0) = 4$ fås $v(t) = 2e^{-2t} + 2$,



Avsnitt 3.5 Den logistiska tillväxttekvationen och dess lösning.

$$y' = ky(M - y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = ky(M - y) \Leftrightarrow dy = dxky(M - y) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{ky(M - y)} = dx \Leftrightarrow dy \frac{1}{Mk} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{M - y} \right) = dx \Rightarrow \{\text{integrera båda sidor}\}$$

$$\frac{1}{Mk} (\ln(y) - \ln(M - y)) = x + C_0 \Leftrightarrow \ln \frac{y}{M - y} = M k x + C_1$$

$$\frac{y}{M - y} = C_2 e^{M k x} \Leftrightarrow y = (M - y) C_2 e^{M k x} \Leftrightarrow y(x) = \frac{M e^{M k x}}{C + e^{M k x}}$$

3505.

- a) $y' = 8.5 \cdot 10^{-6} y(t)(10000 - y(t)), y(0) = 500$ st
 b) WolframAlpha ger $y(x) = \frac{10000e^{0.085x}}{19 + e^{0.085x}} \Rightarrow y(50) \approx 7870$ st
 c) $y(x) = \frac{10000e^{0.085x}}{19 + e^{0.085x}} = 0.9 \cdot 10000 \Rightarrow x \approx 60$ år
 d) $y'(10) = 8.5 \cdot 10^{-6} y(10)(10000 - y(10)) \approx 83$ st/år

3509.

- a) $y' = 0.007y(t)(200 - y(t)), y(0) = 30$ st
 b) WolframAlpha ger $y(x) = \frac{200e^{1.4x}}{5.67 + e^{1.4x}}$
 d)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{200e^{1.4x}}{5.67 + e^{1.4x}} = 200$$

3510. $y(0) = 65, y(1) = 98$ och $y(2) = 142$

$$y' = ky(M - y)$$

Lösningen är av formen: $y(x) = \frac{M e^{ax}}{b + e^{ax}}$

Med WolframAlpha:

solve $m/(b+1)=65$ and $m \exp(a)/(b+\exp(a))=98$ and $m \exp(2a)/(b+\exp(2a))=142$

får man direkt $a = \ln\left(\frac{213}{130}\right)$, $b = \frac{7029}{1105}$ och $M = \frac{8134}{17}$ dvs:

$$y(x) \approx \frac{478e^{x \ln \frac{213}{130}}}{6.4 + e^{x \ln \frac{213}{130}}}$$

För att hitta k , $\frac{d}{dy} \frac{M e^{ax}}{b + e^{ax}} = k \frac{M e^{ax}}{b + e^{ax}} \left(M - \frac{M e^{ax}}{b + e^{ax}} \right)$

$$\frac{d}{dy} (M e^{ax} (b + e^{ax})^{-1}) = k \frac{M e^{ax}}{b + e^{ax}} \left(M - \frac{M e^{ax}}{b + e^{ax}} \right)$$

$$M(ae^{ax}(b + e^{ax})^{-1} - e^{ax}ae^{ax}(b + e^{ax})^{-2}) = k \frac{M e^{ax}}{b + e^{ax}} \left(M - \frac{M e^{ax}}{b + e^{ax}} \right)$$

$$\frac{ae^{ax}}{b + e^{ax}} \left(1 - \frac{e^{ax}}{b + e^{ax}}\right) = k \frac{Me^{ax}}{b + e^{ax}} \left(1 - \frac{e^{ax}}{b + e^{ax}}\right) \Rightarrow$$

$$k = \frac{a}{M} = \frac{17}{8134} \ln\left(\frac{213}{130}\right) \approx 0.001 \text{ år}^{-1}$$

b)

$$(x) \approx \frac{478e^{x \ln \frac{213}{130}}}{6.4 + e^{x \ln \frac{213}{130}}} = 300 \Rightarrow 178e^{x \ln \frac{213}{130}} = 300 \cdot 6.4 \Rightarrow x \approx 4.8 \text{ år} = 4 \text{ år och 10 mån}$$

$$\text{c) } y(x_{\text{maxtillv}}) = \frac{478e^{x \ln \frac{213}{130}}}{6.4 + e^{x \ln \frac{213}{130}}} = \frac{478}{2} \Rightarrow \frac{e^{x \ln \frac{213}{130}}}{6.4 + e^{x \ln \frac{213}{130}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{x \ln \frac{213}{130}} = 6.4 \Rightarrow$$

$x \approx 3 \text{ år och 9 månader}$

3603. $y'' + 4y' + 4y = 0$

a) $y = Ce^{-2x}, y' = -2Ce^{-2x}, y'' = 4Ce^{-2x} \Rightarrow$

$$4Ce^{-2x} - 8Ce^{-2x} + 4Ce^{-2x} = 0$$

b) $y = Cxe^{-2x}, y' = Ce^{-2x} - 2Cxe^{-2x}, y'' = -2Ce^{-2x} - 2C(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) =$

$$= -4Ce^{-2x} + 4Cxe^{-2x} \Rightarrow (-4Ce^{-2x} + 4Cxe^{-2x}) + 4(Ce^{-2x} - 2Cxe^{-2x}) + 4Cxe^{-2x} =$$

$$= -4Ce^{-2x} + 4Cxe^{-2x} + 4Ce^{-2x} - 8Cxe^{-2x} + 4Cxe^{-2x} = 0$$

3604.

a) $r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow r = -1 \pm \sqrt{2.25} = -0.5 \pm 1.5 = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow y(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x}$

b) $r^2 + 0.2r - 0.8 = 0 \Rightarrow r = -0.1 \pm 0.9 = \begin{cases} 0.8 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = C_1e^{0.8x} + C_2e^{-x}$

c) $3r^2 - 6r = 0 \Rightarrow r = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{0x} = C_1e^{2x} + C_2$

3605. d)

$$y'' + 9y' = 0 \Rightarrow r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm 3i$$

Detta är fallet två rent imaginära rötter till den karakteristiska ekvationen. Enligt formelbadet är lösningen:

$$y(x) = C_1 \sin rx + C_2 \cos rx \text{ men } y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \text{ dvs } y(x) = C_1 \sin rx$$

$$y' = rC_1 \cos rx \text{ men } y'(0) = 1.5 \Rightarrow C_1 = 0.5 \Rightarrow y(x) = 0.5 \sin 3x$$

3607. Matas WolframAlpha med: $y' + 2y = -5\sin x, y(0) = 4$ fås direkt:

$$y(x) = 3e^{-2x} - 2\sin(x) + \cos(x)$$

En alternativ väg är att först lösa den partikuljära differentialekvationen:

$$y_p = A \sin x + B \cos x \Rightarrow y_p' = A \cos x - B \sin x$$

Insatt ger:

$$A \cos x - B \sin x + 2(A \sin x + B \cos x) = -5 \sin x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ -B + 2A = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow y_p = -2 \sin x + \cos x$$

Och sedan behandla den homogena differentialekvationen $y_h' + 2y_h = 0 \Rightarrow y_h = Ce^{-2x}$. Totalt fås:

$$y(x) = Ce^{-2x} + \cos x - 2 \sin x \text{ och } y(0) = 4 \Rightarrow y(x) = 3e^{-2x} + \cos x - 2 \sin x$$

$$3608. y'' + 2y' - 8y = 0 \Rightarrow r^2 + 2r - 8 = 0 \Rightarrow r = -1 \pm \sqrt{1 + 8} = -1 \pm 3$$

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}, \quad y'(x) = 2C_1 e^{2x} - 4C_2 e^{-4x}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 - 4C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -6C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{3} \\ C_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{1}{3}(e^{2x} - e^{-4x})$$

3609.

$$y'' + 0.4y' + 5y = 0 \Rightarrow r^2 + 0.4r + 5 = 0 \Rightarrow r = -0.2 \pm \sqrt{0.2^2 - 5} =$$

$$= -0.2 \pm 2.2i \Rightarrow y(t) = Ce^{-0.2t} \cdot \sin 2.2t$$

$$y' = -0.2Ce^{-0.2t} \cdot \sin 2.2t - 2.2Ce^{-0.2t} \cdot \cos 2.2t$$

$$y'(0) = 2 \Rightarrow C = -0.91 \Rightarrow y(t) = -0.91e^{-0.2t} \cdot \sin 2.2t$$

3610.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2x \Rightarrow x'' + 2x = 0 \Rightarrow r^2 + 2 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{2}i$$

Då sin och cos har samma frekvens räcker det med den ena funktionen. $x(0) \neq 0$ ger att vi väljer cosinus.

$$x(t) = C \cos \sqrt{2}t, x(0) = 5.2 \Rightarrow C = 5.2 \Rightarrow x(t) = 5.2 \cos \sqrt{2}t$$

$$x(t) = 0 \text{ då } \sqrt{2}t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \approx 1.1 \text{ s}$$

3611. a)

$$y'' = -0.16y \Rightarrow y'' + 0.16y = 0 \Rightarrow r^2 + 0.16 = 0 \Rightarrow r = \pm 0.4i$$

$$y(t) = C \sin 0.4t + 0.075 \cos 0.4t \Rightarrow y'(t) = 0.4C \cos 0.4t - 0.075 \cdot 0.4 \sin 0.4t$$

$$y'(0) = 0.03 \Rightarrow 0.4C = 0.03 \Rightarrow C = 0.075$$

$$y(t) = 0.075\sin 0.4t + 0.075\cos 0.4t$$

$$b) d_{max} = \sqrt{0.075^2 + 0.075^2} \approx 0.11 \text{ m}$$

3612. Frågan är något felställd.

Här är först lösningen om strömmen i spolen är noll från början dvs $i_L(0) = 0$.

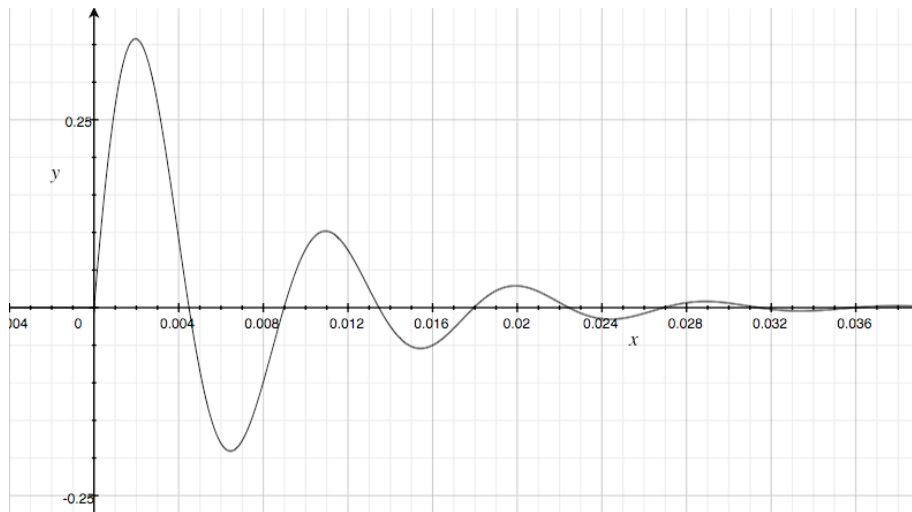
$$i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{1}{LC}i = 0, i(0) = 0 \text{ och } i'(0) = \frac{U}{L} \approx 337$$

$$r^2 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow r = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \approx -140 \pm 700j \Rightarrow$$

$$i(t) = Ce^{-140t}\sin 700t \Rightarrow i'(t) = C700e^{-140t}\cos 700t - 140Ce^{-140t}\sin 700t$$

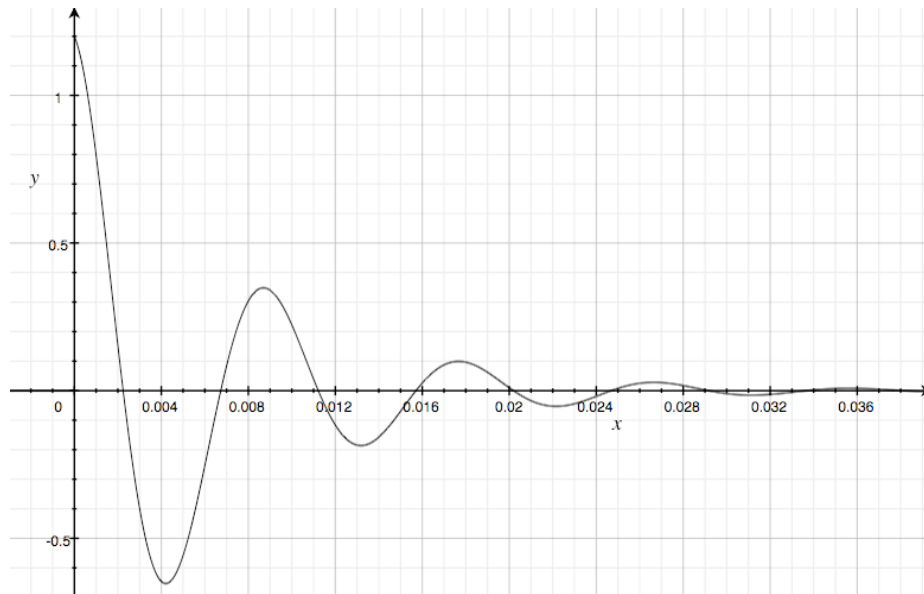
$$i'(0) = 337 = 700C \Rightarrow C \approx 0.48$$

$$i(t) = 0.48e^{-140t}\sin 700t \text{ A}$$



Nu till lösningen om spolen är kopplad parallellt med kondensatorn från början och sålunda har en begynnelseström $i_l(0) = \frac{U}{R}$.

$$i(t) = C e^{-140t} \cos 700t \Rightarrow i(t) = 1.2 e^{-140t} \cos 700t$$



3701.

a) $y' = 0.031(27 - y) \text{ } ^\circ/\text{min}$

b) $y'(20) = 0.031(27 - 20) \approx 0.22 \text{ } ^\circ/\text{min}$

c) $y(t) = 27 - 19e^{-0.031t}$

d) $y(t) = 27 - 19e^{-0.031t} = 22 \Rightarrow e^{-0.031t} = \frac{5}{19} \Rightarrow t \approx 43 \text{ min}$

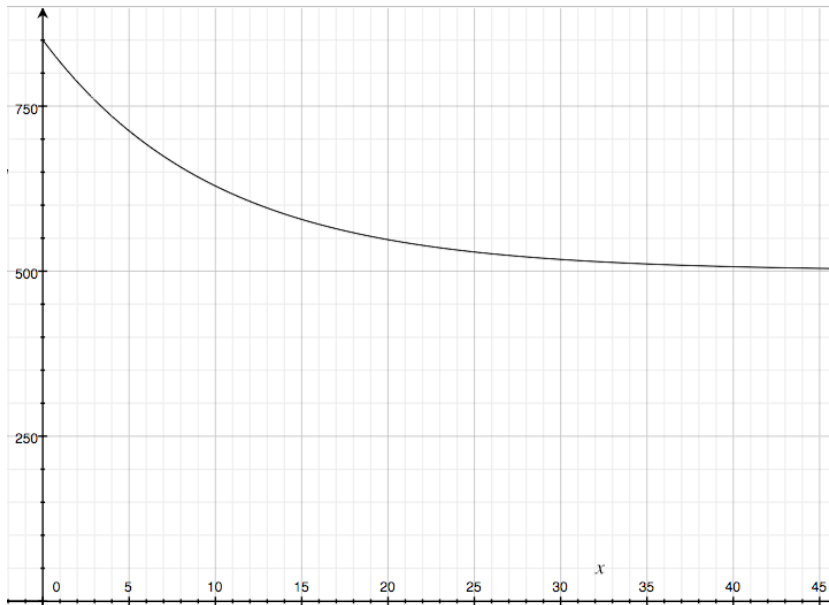
3702. a) 50 kg är tillskottet/år och $0.1m$ är de 10 % av föroreningarna som försvinner/år.

b) $m' = 50 - 0.1m = 0.1(500 - m)$, och $m(0) = 850$

$$m(t) = 500 + 350e^{-0.1t}$$

c) $m(5) = 500 + 350e^{-0.5} \approx 710$ kg

d) $m(\infty) = 500$ kg

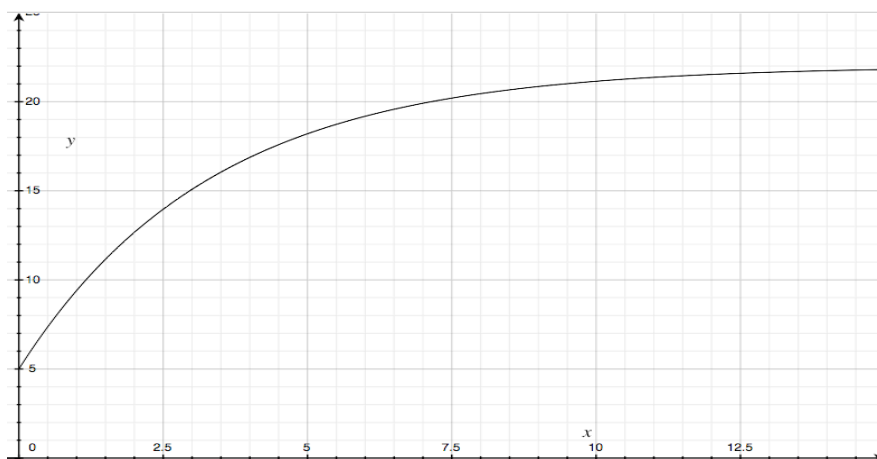


3703. $y(x) = 100e^{-x/200}$

$$y(x) = 100e^{-x/200} = 75 \Rightarrow e^{-x/200} = 0.75 \Rightarrow t = 58 \text{ l}$$

3704. $y' = -0.3(y - 22) \text{ }^\circ/\text{min}$

$$y(t) = 22 - 17e^{-0.3t} \text{ }^\circ\text{C} \Rightarrow y(5) \approx 18^\circ\text{C}$$



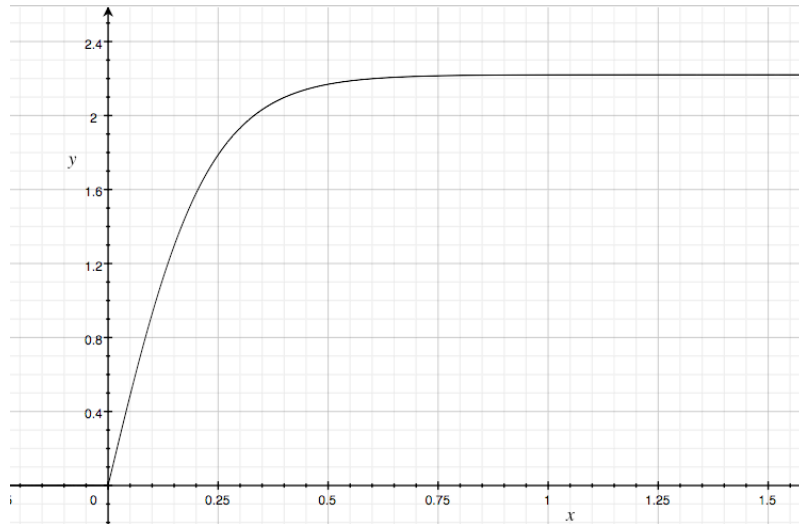
3705. se exempel 2 sid 143

a) $F = am = v'm = mg - kv^2 \Rightarrow v' = g - \frac{k}{m}v^2 = 9.82 - 2v^2$

b) Med hjälp av WolframAlpha får vi: $v(t) = \frac{2.22e^{8.9t} - 2.22}{e^{8.9t} + 1} = 2.22 - \frac{4.44}{e^{8.9t} + 1}$
2.2 m/s

c) $v'(v = 0) = g - \frac{k}{m}v^2(0) = 9.82 - 2(0)^2 = 9.82 \text{ m/s}^2$

$v'(v = 2) = 9.82 - 2(2)^2 \approx 1.82 \text{ m/s}^2$



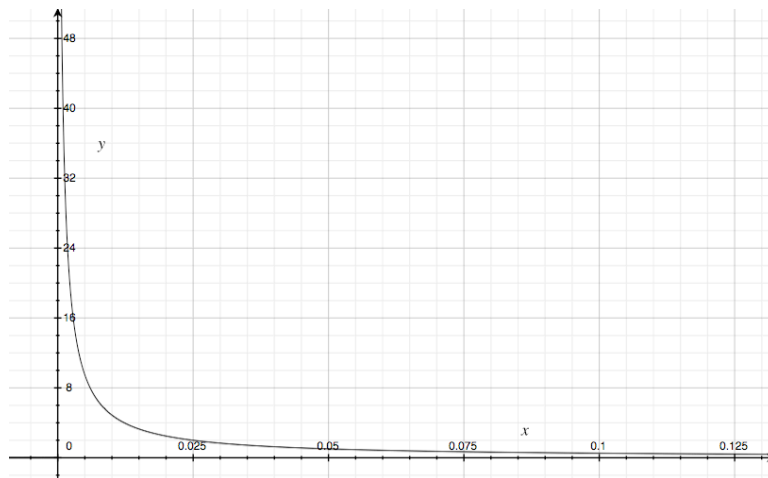
3706. a) $F = am = v'm = -kv^2 \Rightarrow v' = -\frac{k}{m}v^2 = -20v^2$

$$\frac{dv}{dt} = -20v^2 \Leftrightarrow \frac{dv}{v^2} = -20dt \Leftrightarrow -\frac{1}{v} = -20t + C$$

$$v(t) = \frac{1}{20t + C}, v(0) = 180 \Rightarrow v(t) = \frac{180}{3600t + 1}$$

b) $(0.001) = \frac{180}{3.6+1} \approx 39 \text{ m/s}$

c)



3707. a) $y' = -0.027(y - (-20))$ det är -20°C .

b) Då kaffets temperatur närmar sig -20°C går förändringen mot 0. (En mera realistisk modell tar hänsyn till övergången mellan vätska och fruset kaffe, men det lämnas till kurser i fysik.)

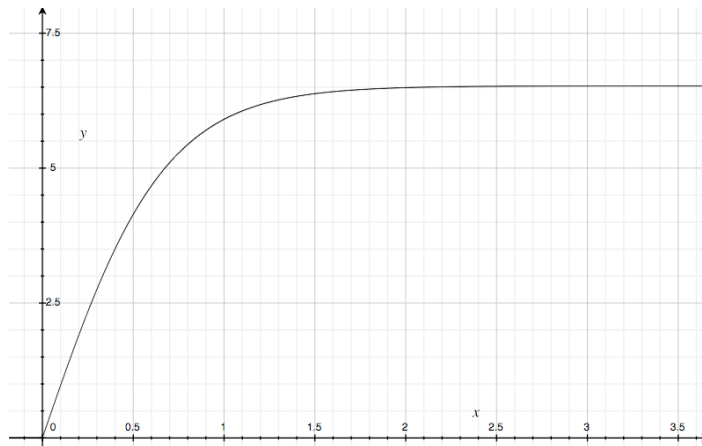
3708.

a) $T'(t) = -k(T(t) - T_0) \Rightarrow T'(t) = -k(T(t) - 21), T(t) = 61e^{-kt} + 21$
 $T(1) = 61e^{-k} + 21 = 71 \Rightarrow k \approx 0.2$

b) $(t) = 61e^{-0.2t} + 21 = 45 \Rightarrow t \approx 4.7 \text{ min}$

3709. a) $F = am = y'm = mg - ky^2 \Rightarrow y' = g - \frac{k}{m}y^2 = 9.82 - \frac{18}{78}y^2$

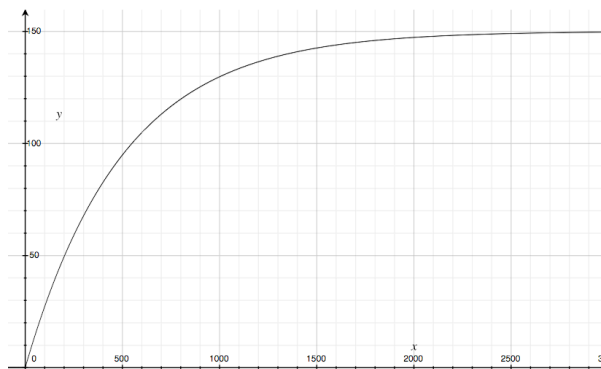
$y' = \frac{dy}{dt} = 9.82 - \frac{18}{78}y^2$ WolframAlpha ger $y(t) = \frac{6.52(e^{3x}-1)}{e^{3x}+1} \Rightarrow y(\infty) = 6.52 \text{ m/s}$



3710.

$$y'(t) = 50 \cdot 0.006 - \frac{50}{25000}y(t) = 0.3 - \frac{1}{500}y(t) = \frac{1}{500}(150 - y(t))$$

$$y(t) = 150(1 - e^{-0.002t})$$



3711. a)

$$\frac{da}{dt} = -0.6a \Rightarrow a(t) = 24e^{-0.6t}$$

b)

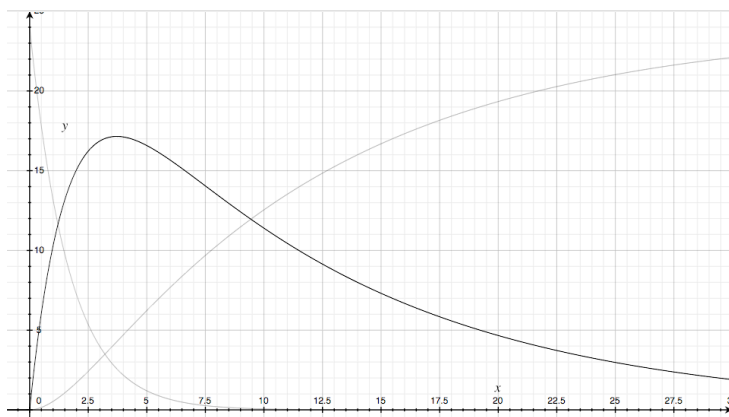
$$b'(t) = 0.6a - 0.09b = 14.4e^{-0.6t} - 0.09b \Rightarrow$$

$$b(t) = 28.2(e^{-0.09t} - e^{-0.6t})$$

$$c) c'(t) = 0.09b(t) = 0.09 \cdot 28.2(e^{-0.09t} - e^{-0.6t}) \Rightarrow c(t) = 2.54 \left(\frac{1}{-0.09} e^{-0.09t} - \frac{1}{-0.6} e^{-0.6t} \right)$$

$$\Rightarrow c(t) = 4.2e^{-0.6t} - 28.2e^{-0.09t} + 24$$

d)



$$e) a(t) = 24e^{-0.6t} = 28.2(e^{-0.09t} - e^{-0.6t}) = b(t) \Rightarrow 52.2e^{-0.6t} = 28.2e^{-0.09t} \Rightarrow$$

$$e^{-0.6t + \ln 52.2} = e^{-0.09t + \ln 28.2} \Rightarrow -0.6t + \ln 52.2 = -0.09t + \ln 28.2 \Rightarrow t = 1.21 \text{ s}$$

$$f) b(t) = 28.2(e^{-0.09t} - e^{-0.6t}) \Rightarrow b'(t) = 28.2(-0.09e^{-0.09t} + 0.6e^{-0.6t}) = 0$$

$$\Rightarrow 0.09e^{-0.09t} = 0.6e^{-0.6t} \Rightarrow \ln 0.09 - 0.09t = \ln 0.6 - 0.6t \Rightarrow t \approx 3.72$$

$$b(3.72) \approx 17.2 \mu\text{g}$$

$$g) a(5) \approx 1.19 \mu\text{g}, b(5) \approx 16.6 \mu\text{g}, c(5) \approx 6.23 \mu\text{g}$$

Test 3

Sid 149-150

1.

$$2y' = -0.8y \Leftrightarrow y' = -0.4y \Rightarrow y(x) = Ce^{-0.4x} \text{ men } y(0) = -4 \Rightarrow y(x) = -4e^{-0.4x}$$

2. Sök den primitiva funktionen 2 gånger.

$$y'' = 12x^2, y' = 4x^3 + C \text{ och } y = x^4 + Cx + D$$

3. svaren i boken är inte direkt fel, men underliga. Metoden som används nedan kommer i kapitel 4.

a) $\frac{dA}{dt} = \frac{d\pi r^2}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$

b) $\frac{dA}{dt} = \frac{d4\pi r^2}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$

c) $\frac{dV}{dt} = \frac{d\frac{4}{3}\pi r^3}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

d) $\frac{dV}{dt} = kA$

4. Modellen förutsätter exponentiell tillväxt (något orimligt).

$$\frac{dN}{dt} = kN, 6 = k \cdot 42 \Rightarrow N'(t) = \frac{1}{7}N(t)$$

5.

$$y(x) = Ce^{-3x} \text{ men } y(0) = 2 \Rightarrow y(x) = 2e^{-3x} \text{ och } y'(x) = -6e^{-3x}$$

Detta ger tangentens ekvation: $y - 2 = -6(x - 0)$ dvs $y = 2 - 6x$

7. a) Värdeminskningen är 35 % per år. (Det är värt att notera att det **inte** är värdeminskningen $V(t) = V_0 \cdot 0.65^t$ som differentialekvationen totalt beskriver.)

b) $V(t) = V_0 e^{-0.35 \cdot t} \Rightarrow V(3) = 420\,000 e^{-0.35 \cdot 3} \approx 147\,000$ kr

8. Använd Newton avsvlningslag där temperaturen börjar i 95° och svalnar av mot 21° .

a)

$$T(t) = 21 + 74e^{-kt} = 21 \left(1 + \frac{74}{21}e^{-kt}\right) \text{ och } T(5) = 21 \left(1 + \frac{74}{21}e^{-k5}\right) = 65 \Rightarrow k \approx -0.104$$

b)

$$T(t) = 21 + 74e^{-0.104t} = 45 \Rightarrow t \approx 11 \text{ min}$$

11.

$$F = m \cdot a = m \cdot v' = mg - k \cdot v^{1.8} \Rightarrow v' = g - \frac{k}{m} \cdot v^{1.8} \text{ m/s}$$

Maximal hastighet fås då $v'(t) = 0$ dvs då $g = \frac{k}{m} v^{1.8} \Rightarrow v_{max} = \left(\frac{mg}{k}\right)^{\frac{1}{1.8}} \approx 30 \text{ m/s}$.

12. Använd den logistiska tillväxtekvationen:

$$S' = 0.003 \cdot S(S_{max} - S) \text{ där } S_{max} = 100\,000$$

$$S(t) = \frac{100\,000 \cdot e^{0.3t}}{9 + e^{0.3t}} \Rightarrow S(21) = \frac{100\,000 \cdot e^{4.2}}{9 + e^{4.2}} \approx 28\,000 \text{ st}$$

13. Använd den karakteristiska ekvationen:

$$y'' + 4y' - 5 = 0 \Rightarrow r^2 + 4r - 5 = (r - 1)(r + 5) = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -5 \Rightarrow$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} \Rightarrow y'(x) = C_1 e^{-x} - 5C_2 e^{-5x}$$

Begynnelsevillkoren ger:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - 5C_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -4/3 \\ C_1 = 4/3 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \frac{4}{3}(e^{-x} - e^{5x})$$

14. Det som krävs är att den karakteristiska ekvationen har rötterna $r = 3$ och $r = -3$ dvs:

$$(r - 3)(r + 3) = r^2 - 9 = 0 \Rightarrow y'' - 9y = 0$$

15.

$$\frac{dp(h)}{dh} = -kp(h) \Rightarrow p(h) = P_0 \cdot e^{-kh}$$

(Det står fel facit i uppgiften. Det borde stått att trycket faller proportionellt mot trycket (inte proportionellt mot höjden)).

b) $48.3 = 101.3e^{-k \cdot 5} \Rightarrow k = 0.148 \text{ km}^{-1}$

c) $101.3e^{-0.148 \cdot 8.5} \approx 28.8 \text{ kPa}$

16.

$$y' = ky(M - y) \Leftrightarrow y(x) = \frac{Me^{Mkx}}{C + e^{Mkx}}$$

$$y' = 0.000085(5000 - y) \Rightarrow y(t) = \frac{5000e^{0.425t}}{49 + e^{0.425t}}$$

a) $y(2) = \frac{5000e^{0.85}}{49 + e^{0.85}} \approx 230 \text{ fiskar}$

b) $y(4) = \frac{5000e^{1.7}}{49+e^{1.7}} \approx 500$ fiskar

c) När 5000 är uppnått är tillväxten $y' = 0$, dvs max 5000 fiskar.

d) $\frac{5000e^{0.425t}}{49+e^{0.425t}} = 2500 \Rightarrow 2e^{0.425t} = 49 + e^{0.425t} \Rightarrow t = \frac{\ln 49}{0.425} \approx 9$ månader

17. a) $v'(t) = -\frac{12}{800}v^2(t) = -0.015v^2(t)$

b) WolframAlpha ger: $v(t) = \frac{200}{3t-200c_1} = \frac{\frac{200}{3}}{t-\frac{200c_1}{3}}, y(0) = 35 \Rightarrow v(t) = \frac{200/3}{t+\frac{200}{3\cdot 35}} \approx \frac{67}{t+1.9}$

c) $v(3) \approx 14$ m/s

d) $v(t) = s'(t) \Rightarrow s(t) = 67 \ln(t + 1.9) - 43 \Rightarrow s(3) = 67 \ln(3 + 1.9) - 43 \approx 63$ m

Blandade uppgifter

Blandade uppgifter sid 151-155

4.

5.

$$2 \frac{dy}{dx} - y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}y = 0 \Rightarrow y(x) = Ce^{0.5x} \text{ och } (0,3) \text{ ger } y(x) = 3e^{0.5x}$$

6. $\frac{dy}{dx} = -2y$ ger direkt att $y(x) = Ce^{-2x}$ och punkten (1,2) att $2 = Ce^{-2}$ dvs $C = 2e^2$.

$$y(x) = 2e^2 \cdot e^{-2x} = 2 \cdot e^{2-2x} \Rightarrow y' = -4 \cdot e^{2-2x} \Rightarrow$$

Tangenten får beskrivningen: $y - 2 = -4(x - 1) \Rightarrow y = -4x + 6$

7. Använd den karakteristiska ekvationen:

$$y'' + 4y' - 12y = 0 \Rightarrow r^2 + 4r - 12 = (r + 6)(r - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = -6 \end{cases}$$

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{-6x} \Rightarrow y'(x) = 2Ae^{2x} - 6Be^{-6x} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - 6B = 3 \end{cases} \text{ dvs } \begin{cases} A = 3/8 \\ B = -3/8 \end{cases}$$

Svar: $y(x) = \frac{3}{8}(e^{2x} - e^{-6x})$

8. $y' + 3y = 0 \Rightarrow y' = -3y$ i (0, -2) är $k = y'(0) = -3 \cdot y = -3(-2) = 6$.

11.

$$2y' + \frac{4}{x}y = \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x} \Leftrightarrow xy' + 2y = \frac{4}{x} - 2$$

Högerledets utseende gör att man kan prova med att ansätta:

$$y = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + C \Rightarrow y' = -2\frac{A}{x^3} - \frac{B}{x^2}$$

$$x\left(-2\frac{A}{x^3} - \frac{B}{x^2}\right) + 2\left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + C\right) = \frac{4}{x} - 2$$

$$-2\frac{A}{x^2} - \frac{B}{x} + \frac{2A}{x^2} + \frac{2B}{x} + 2C = \frac{4}{x} - 2$$

$$\begin{cases} A = \text{godtyckligt} \\ B = 4 \\ C = -1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{A}{x^2} + \frac{4}{x} - 1$$

12. $y' - \sin(x) \cdot y = 0$ ansätt $y = Ce^{-\cos x} \Rightarrow y' = C \sin x e^{-\cos x}$ och $y(x) = 8e^{-\cos x}$

13. $f''(x) + 9f(x) = 0 \Rightarrow r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm 3i \Rightarrow f(x) = A \sin 3x + B \cos 3x$

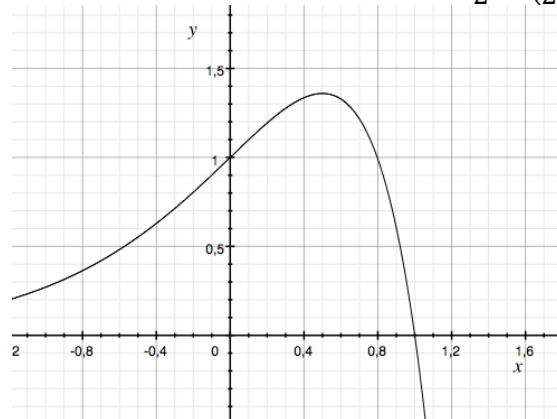
$$f'(x) = 3A \cos 3x - 3B \sin 3x \Rightarrow B = 4 \text{ och } A = \frac{5}{3}$$

$$f(x) = \frac{5}{3} \sin 3x + 4 \cos 3x \quad f_{\max}(x) = \sqrt{\frac{25}{9} + 16} = \frac{13}{3}$$

14. $y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0 \Rightarrow r = 2$, dubbelrot

$$y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} \Rightarrow \begin{cases} Ae^2 + Be^2 = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = e^{2x} - xe^{2x} = e^{2x}(1 - x)$$

$$\Rightarrow y'(x) = 2e^{2x}(1 - x) - e^{2x} = 0 \text{ då } x = \frac{1}{2}, y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e}{2}$$



15.

$$1400 = 900 \cdot a^2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{14}}{3}; N(5) = 900 \cdot \left(\frac{\sqrt{14}}{3}\right)^5 \approx 2700 \text{ st}$$

16. Den logistiska tillväxttekvationen:

$$y' = ky(M - y) \Leftrightarrow y(x) = \frac{Me^{Mkx}}{C + e^{Mkx}}$$

a) I det här fallet är: $k = 0.003$ och $M = 500 \Rightarrow y(x) = \frac{500e^{1.5x}}{49 + e^{1.5x}} \Rightarrow y(1) \approx 42, y(4) \approx 446$

b) $y'(1) = 0.003y(1)(500 - y(1)) \approx 58 \frac{\text{flugor}}{\text{dygn}}$ och $y'(4) \approx 72 \frac{\text{flugor}}{\text{dygn}}$

17. a) 10 % tillväxt i början betyder att $y'(0) = 4$

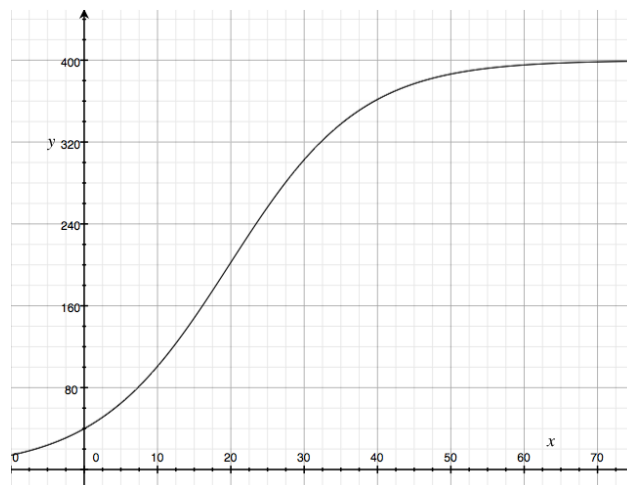
$$y' = ky(M - y) \Leftrightarrow 4 = k \cdot 40(400 - 40) \Rightarrow k = 2.8 \cdot 10^{-4}$$

b)

$$y' = 2.8 \cdot 10^{-4}y(400 - y)$$

c)

$$y(x) = \frac{400e^{0.11x}}{9 + e^{0.11x}} = 300 \Leftrightarrow x \approx 30 \text{ år}$$



19. $\frac{dP}{dt} = kP \Rightarrow P(t) = Ce^{kt}$ Fram: $2.5 = 2.8e^{-k_1 6} \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{6} \ln \frac{2.5}{2.8} \Rightarrow P_{fram}(20) = 1.9 \text{ bar}$

Bak: $2.6 = 2.8e^{-k_2 6} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{6} \ln \frac{2.6}{2.8} \Rightarrow P_{bak}(20) = 2.2 \text{ bar}$

Skillnaden är: $P_{bak}(20) - P_{fram}(20) = 2.8(e^{-20k_2} - e^{-20k_1}) \approx 0.268 \text{ bar högre bak.}$

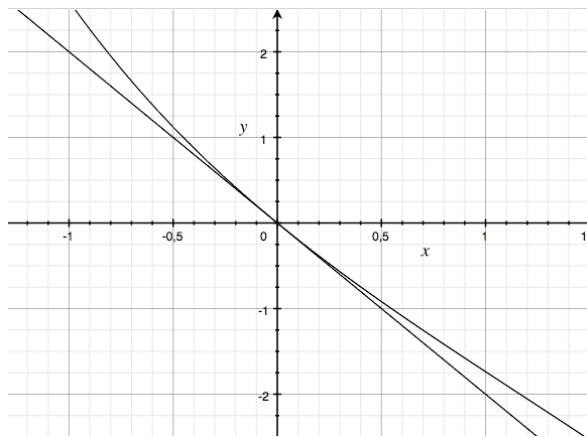
20. Ekvationen saknar funktionen y efter faktorn 0.32. Sådär borde den sett ut:

$$y'' + 0.4y' - 0.32y = 0 \Rightarrow r = -0.2 \pm \sqrt{0.2^2 + 0.32} = -0.2 \pm 0.6 = \begin{cases} 0.4 \\ -0.8 \end{cases}$$

$$y(x) = C_1 e^{0.4x} + C_2 e^{-0.8x}, y'(x) = 0.4C_1 e^{0.4x} - 0.8C_2 e^{-0.8x} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 0.4C_1 - 0.8C_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 1.2C_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -C_1 = \frac{3}{5} \\ C_1 = -\frac{2}{1.2} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{5}{3} e^{-0.8x} - \frac{5}{3} e^{0.4x}$$



21. a) Faktorn $(6000 - N)$ betyder att ju närmare populationen kommer 6000 st, desto mindre blir ökningen, dvs tillväxten stannar av.

b) Tillväxten är störst vid halva den maximala populationen dvs då $N = 3000$.

$$3000 = \frac{6000}{6.5e^{-0.04848t} + 1} \Rightarrow 6.5e^{-0.04848t} + 1 = 2 \Rightarrow t = 38.6 \text{ min}$$

22.

a) $N' = -1.79 \cdot 10^{-9} N(t) \Rightarrow N(t) = 2 \cdot 10^{23} e^{-1.79 \cdot 10^{-9} t}$

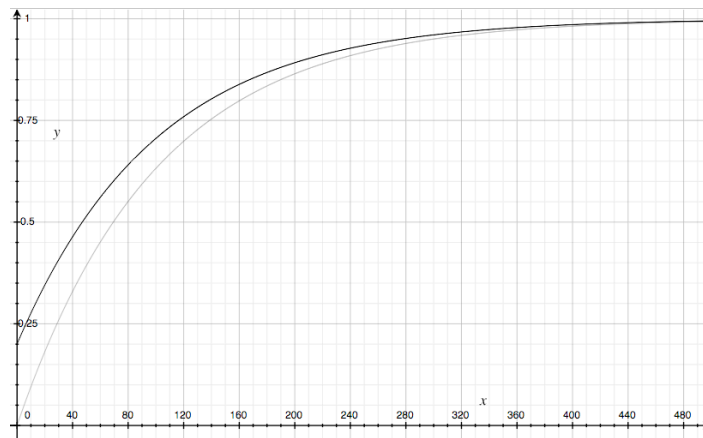
b) $N'(0) = -1.79 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{23} \approx -3.6 \cdot 10^{14} \text{ st/s}$

c) $N(0) - N(1 \text{ år}) = 2 \cdot 10^{23} (1 - e^{-1.79 \cdot 10^{-9} \cdot 1 \text{ år}}) \approx 1.1 \cdot 10^{22} \text{ st dvs ca } 5.5 \%$

23. a) $p' = k(p_a - p) \Rightarrow p(t) = 1 - e^{-0.01t}$

b) $p(t) = 1 - 0.8e^{-0.01t}$

c)



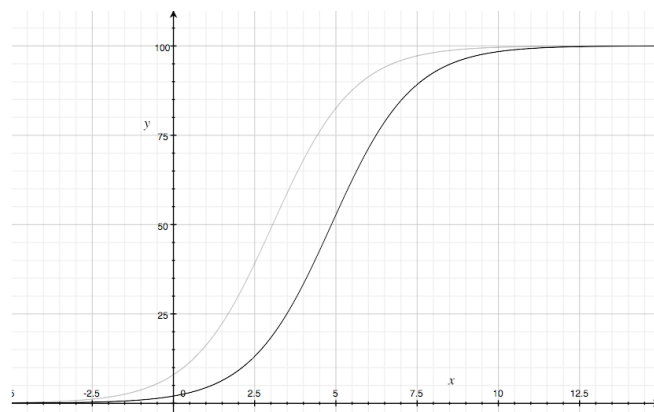
d) $(t) = 1 - e^{-0.01t} = 0.9 \Rightarrow t \approx 230 \text{ s}$

24. $y' = 0.008y(100 - y), y(0) = 8 \Rightarrow y(t) = \frac{100e^{0.8t}}{11.5 + e^{0.8t}}$

$y(3) \approx 49 \text{ st}, \quad \text{ca } 20 \text{ st/dag}$

$y' = 0.008y(100 - y), y(0) = 2 \Rightarrow y(t) = \frac{100e^{0.8t}}{49 + e^{0.8t}}$

$y(3) \approx 18 \text{ st}, \quad \text{ca } 12 \text{ st/dag}$



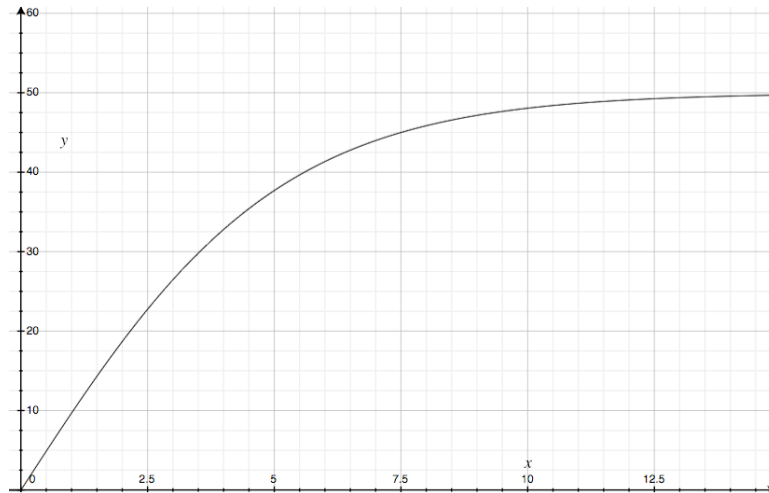
25. (Det är tyvärr flera fel i facit i den här uppgiften.)

$$F = am = v'm = mg - kv^2 \Rightarrow v' = g - \frac{k}{m}v^2 = 9.82 - \frac{k}{80}v^2$$

a) Vid den maximala hastigheten 50 m/s är $v' = 0$ dvs

$$\Rightarrow 0 = 9.82 - \frac{k}{80}v^2 \Rightarrow 9.82 = \frac{k}{80}50^2 \Rightarrow k = 0.314 / \text{m}$$

b) $v' = g - \frac{k}{m}v^2 = 9.82 - \frac{0.314}{80}v^2 \Rightarrow v(t) = 50 \frac{e^{0.393t} - 1}{e^{0.393t} + 1} \text{ m/s}$



c) $v(3) \approx 26$ m/s, $v(8) \approx 46$ m/s

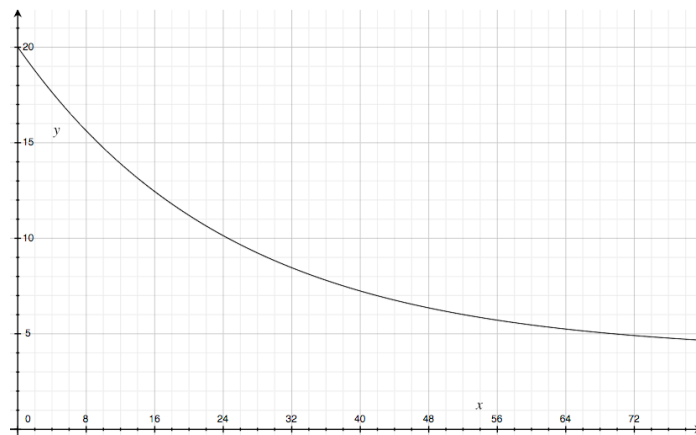
26.

$$y' = -Cy \Rightarrow y(t) = Ce^{-at} = \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(3) = 0.2 \end{cases} = e^{t \frac{\ln 0.2}{3}} \approx e^{-0.536t}$$

$$y(12) = e^{-0.536 \cdot 12} \approx 0.0016 \%$$

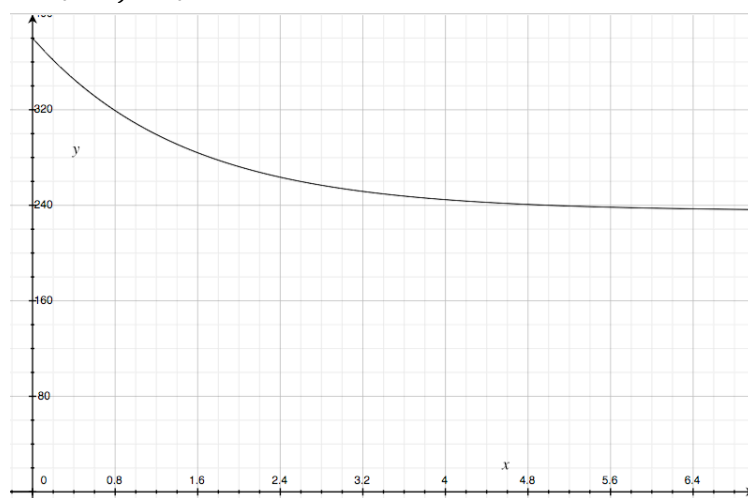
27. a) $T' = k(T - T_{\text{rum}}) = -0.04(T - 4) \Rightarrow T(t) = 4 + 16e^{-0.04t} \text{ } ^\circ\text{C}$

b) $10 = 4 + 16e^{-0.04t_{10}} \Rightarrow t_{10} \approx 24$ min och $t_5 \approx 69$ min

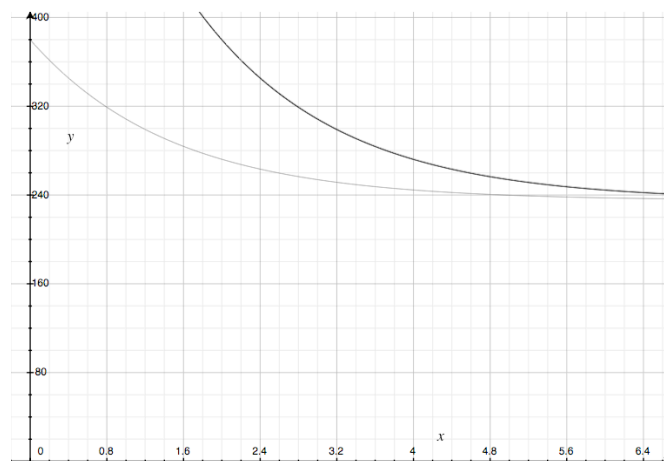


28. a) $y'(t) = 160 - 0.68y(t), y(0) = 380$ mg

b) $y'(t) = 0.68(235 - y(t)) \Rightarrow y(t) = 145e^{-0.68t} + 235$



c) Om den initiala dosen görs större kommer tiden det tar att nå slutvärdet 235 mg bli längre. Exempel 800 mg i grafen nedan.



d) Om den dagliga dosen ökas kommer slutvärdet att stanna på ett högre värde.

e) Hur stor den dagliga dosen är.

29. $T' = k(T_{\text{Rum}} - T)$, ju närmare T kommer T_{Rum} , desto mindre blir derivatan. Om $T_{\text{Rum}} > T$ initialt är derivatan positiv och T stiger. Är $T_{\text{Rum}} < T$ initialt är derivatan negativ och T minskar (svalnar).

30.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = k \Rightarrow f'(x) = kf(x) \Rightarrow f''(x) = kf'(x) = kkf(x) = k^2f(x)$$

$$f^{(n)}(x) = k^n f(x) \Rightarrow \frac{f^{(n)}(x)}{f(x)} = k^n$$

31.

a) $v'(t) = 10 - 20v(t)$

b) $v'(t) = 10 - 20v(t) = 20(0.5 - v(t)) \Rightarrow v(t) = 0.5(1 - e^{-20t})$

c) 0.5 m/s

32.

$$F = am = v'm = mg - kv \Rightarrow v' = g - \frac{k}{m}v, v' = 0 \text{ d\aa } v = \frac{gm}{k}$$

33. a) $y'(t) = 20 \cdot 2 - \frac{20}{10000}y(t) = 40 - \frac{1}{500}y(t) = \frac{1}{500}(20\,000 - y(t))$

$$y(t) = 20\,000 \left(1 - e^{-\frac{t}{500}}\right)$$

b) $y(t) = 20\,000 \left(1 - e^{-\frac{t}{500}}\right) = 6000 \Rightarrow t \approx 178 \text{ s}$

c) $\frac{20\,000 \text{ mg}}{10\,000 \text{ l}} = 2 \text{ mg/l}$