Matematik 5 svar

Kapitel 3

3101. a) $y'(x) = -2x \Rightarrow y(x) = -x^2 + C$

b) $y'(x) = x^2 - x + 1 \Rightarrow y(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$

c) $y' - x^2 + 2 = 0 \Rightarrow y' = x^2 - 2 \Rightarrow y(x) = \frac{x^3}{3} - 2x + C$

d) $\frac{1}{2}y' - x + x^3 = 1 \Rightarrow y' = 2x - 2x^3 + 2 \Rightarrow y(x) = x^2 - \frac{x^4}{2} + 2x + C$

e) $y'(x) = \frac{4}{e^{2x}} = 4e^{-2x} \Rightarrow y(x) = -2e^{-2x} + C = -\frac{2}{e^{2x}} + C$

f) $y'(x) = 2\cos\frac{x}{2} \Rightarrow y(x) = 4\sin\frac{x}{2} + C$

3102. a) $y''(x) = -3x + 1 \Rightarrow y'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + C \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{x^2}{2} + Cx + D$

b) $y''(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = C \Rightarrow y(x) = Cx + D$

c) $y''(x) = 8e^{2x} \Rightarrow y'(x) = 4e^{2x} + C \Rightarrow y(x) = 2e^{2x} + Cx + D$

d) $y''(x) = -4\sin x \Rightarrow y'(x) = 4\cos x + C \Rightarrow y(x) = 4\sin x + Cx + D$

e) $y''(x) = 18\sqrt{x} = 18x^{1/2} \Rightarrow y'(x) = 12\,x^{3/2} + C \Rightarrow y(x) = \frac{24}{5}\,x^{5/2} + Cx + D$

f) $y''(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow y'(x) = -\frac{1}{x} + C \Rightarrow y(x) = -\ln|x| + Cx + D$

3103. a) $\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow y(x) = x^2 + C$

b) $\frac{dy}{dx} = 4 \cdot e^{2x} \Rightarrow y(x) = 2 \cdot e^{2x} + C$

c) $\frac{dy}{dt} = \frac{2}{t} \Rightarrow y(t) = 2\ln|t| + C$

d) $\frac{dy}{dt} = 4\sin 2t \Rightarrow y(x) = -2\cos 2t + C$

3104. a) $y'(x) = 2 \Rightarrow y(x) = 2x + C$ och $y(3) = 10 \Rightarrow y(x) = 2x + 4$

b) $y'(x) = 4x + 3 \Rightarrow y(x) = 2x^2 + 3x + C$ och $y(1) = 10 \Rightarrow y(x) = 2x^2 + 3x + 5$

c) $y'(x) = e^x + 1 \Rightarrow y(x) = e^x + x + C$ och $y(1) = e \Rightarrow y(x) = e^x + x - 1$

d) $y'(x) = \cos x - \sin x \Rightarrow y(x) = \sin x + \cos x + C$ och $y(0) = 1$

$$\Rightarrow y(x) = \sin x + \cos x$$

e) $y''(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = C \Rightarrow y(x) = Cx + D$ och $y(0) = 3, y(1) = 5$

$$\Rightarrow y(x) = 2x + 3$$

f) $y''(x) = 2 \Rightarrow y'(x) = 2x + C \Rightarrow y(x) = x^2 + Cx + D$ och $y(0) = 1, y'(3) = 4$

$$\Rightarrow y(x) = x^2 - 2x + 1$$

3105. $y(x) = 1 + \cos x \Rightarrow y'(x) = -\sin x$

$$y'\cos x + y\sin x = -\sin x\cos x + (1 + \cos x)\sin x = \sin x \text{ VSV}$$

3106. $y(x) = x - 1 + Ce^{-x} \Rightarrow y'(x) = 1 - Ce^{-x}$

$$x - y = x - (x - 1 + Ce^{-x}) = 1 - Ce^{-x} = y'(x)$$

3107. $y'(x) = 2x + 1 \Rightarrow y(x) = x^2 + x + C$ men $y(2) = 1 \Rightarrow y(x) = x^2 + x - 5$

3108. $y'(x) = 2e^x \Rightarrow y(x) = 2e^x + C$ men $y(1) = 2 = 2e + C = 2e + 2 - 2e \Rightarrow$

$$y(x) = 2e^x - 2e + 2$$

3110. $y'(x) = \sin x \Rightarrow y(x) = -\cos x + C, y(2\pi) = C - \cos 2\pi = 4 \Rightarrow C = 5$

Svar: $y(x) = 5 - \cos x$

3111.

$$y'(x) = 2e^x + e^{x/2} \Rightarrow y(x) = 2e^x + 2e^{x/2} + C$$

$$y(2) - y(1) = 2e^2 + 2e + C - 2e - 2\sqrt{e} - C -= 2e^2 - 2\sqrt{e}$$

3112. a) $y'(x)\sqrt{x} + 1 = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow y(x) = -2\sqrt{x} + C, y(4) = 0 \Rightarrow C = 4$
Svar: $y(x) = 4 - 2\sqrt{x}$

b) $y'(x)e^{2x} = 4 \Rightarrow y'(x) = 4e^{-2x} \Rightarrow y(x) = -2e^{-2x} + C, y(0) = 0 \Rightarrow C = 2$

Svar: $y(x) = 2 - 2e^{-2x}$

c) $y''(x) = 12x^2 + 8 \Rightarrow y'(x) = 4x^3 + 8x + C_1 \Rightarrow y(x) = x^4 + 4x^2 + C_1x + C_2$

$$\begin{cases} 2 = C_2 \\ 10 = 1 + 4 + C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 2 \\ C_1 = 3 \end{cases}$$

Svar: $y(x) = x^4 + 4x^2 + 3x + 2$

d) $y''(x) = x^{-2} \Rightarrow y'(x) = -x^{-1} + C_1, y'(1) = -1 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow y'(x) = -x^{-1}$

$$y(x) = -\ln x + C_2, y(1) = 4 \Rightarrow C_2 = 4$$

Svar: $y(x) = 4 - \ln x$

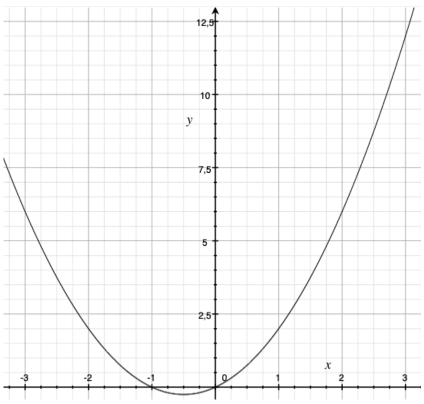
3113. $y(x) = 2x + 3 \Rightarrow y'(x) = 2, y(0) = 3$

3114. $y(x) = x^3 + 3x + 7 \Rightarrow y'(x) = 3x^2 + 3 \Rightarrow y''(x) = 6x = f(x)$

x

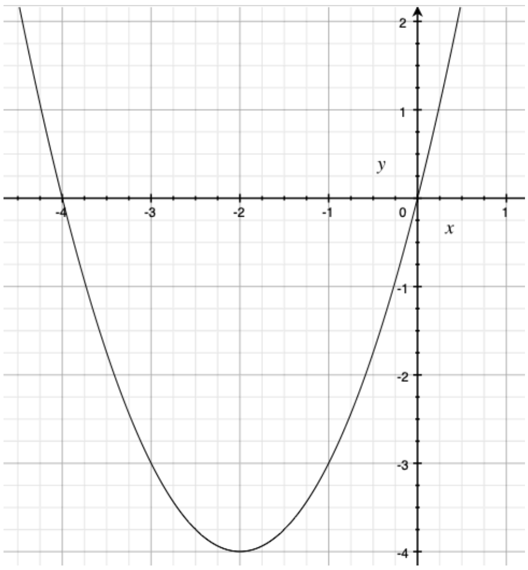
a) $2 = 1^2 + 1 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y(x) = x^2 + x$

b)



3116. $y(0) = 0$ och $y'(0) = 4$

$$y''(x) = 2 \Rightarrow y'(x) = 2x + A = 2x + 4 \Rightarrow y(x) = x^2 + 4x + B = x^2 + 4x$$



3207.

$$y(x) = 2e^{-3x} \Rightarrow y'(x) = -6e^{-3x}$$

Ekvationen kan till exempel vara: $y'(x) = -3y(x), y(0) = 2$

3208.

$$y'(x) = \frac{1}{5}y(x) \Rightarrow y(x) = Ce^{x/5}, y(0) = 2 \Rightarrow y(x) = 2e^{x/5}$$

3209.

$$4f'(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = Ce^{\frac{x}{4}}, f(0) = 2 \Rightarrow f(x) = 2e^{\frac{x}{4}}$$

3210.

$$2y'(x) + 3y(x) = 0 \Rightarrow y'(x) + \frac{3}{2}y(x) = 0 \Rightarrow y(x) = K \cdot e^{-\frac{3x}{2}}$$

Dvs bara kurva A och kurva C kan vara lösningar. I fallet C gäller $K < 0$.

3211.

3212. a)

$$\frac{dN}{dt} = kN \text{ dvs } N(t) = N_0e^{kt}$$

b) $N(t) = N_0e^{0.54t}$

c) $e^{0.54t} = 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0.54} \approx 1.3$ h

3213. a) $\frac{dN}{dt} = N(t) \Rightarrow N(t) = 180 \cdot e^{2.07t}$

b) $t = \frac{1}{2.07} \ln \frac{1000}{180} \approx 50$ min

c) då antalet organismer är många i förhållande till kärlets storlek

3216. a) $\frac{dK}{dt} = -6.93 \cdot 10^{-3} K \Rightarrow K(t) = 0.2e^{-6.93 \cdot 10^{-3} t}$ M

b) $K(400) = 0.2e^{-6.93 \cdot 10^{-3} \cdot 400}$ M ≈ 0.0125 M

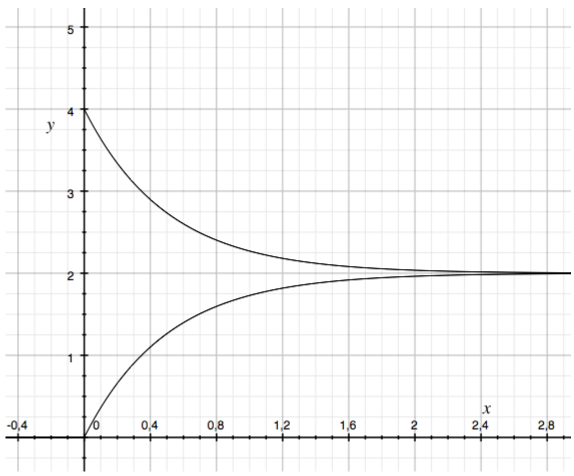
3217.

$$\frac{dy}{dt} = -0.012 \cdot y \Rightarrow y(t) = 4.8e^{-0.012t}$$

3306.
b) $v(t) = 2 - 2e^{-2t}, v'(t) = 4e^{-2t}, v(0) = 0$ sätt in i ursprunglig ekvation:

$$4e^{-2t} = 4 - 2(2 - 2e^{-2t}) = 4 - 4 + 4e^{-2t} = 4e^{-2t}$$

c) Om $v(0) = 4$ fås $v(t) = 2e^{-2t} + 2$,



Avsnitt 3.5 Den logistiska tillväxtekvationen och dess lösning.

$$y' = ky(M-y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = ky(M-y) \Leftrightarrow dy = dxky(M-y) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{ky(M-y)} = dx \Leftrightarrow dy\frac{1}{Mk}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{M-y}\right) = dx \Rightarrow \{\text{integrera båda sidor}\}$$

$$\frac{1}{Mk}\big(\ln(y)-\ln(M-y)\big) = x + C_0 \Leftrightarrow \ln\frac{y}{M-y} = Mkx + C_1$$

$$\frac{y}{M-y} = C_2e^{Mkx} \Leftrightarrow y = (M-y)C_2e^{Mkx} \Leftrightarrow y(x) = \frac{Me^{Mkx}}{C+e^{Mkx}}$$

3505.
a) $y' = 8.5\cdot 10^{-6}y(t)\big(10000-y(t)\big), y(0) = 500$ st
b) WolframAlpha ger $y(x) = \frac{10000e^{0.085x}}{19+e^{0.085x}} \Rightarrow y(50) \approx 7870$ st
c) $y(x) = \frac{10000e^{0.085x}}{19+e^{0.085x}} = 0.9\cdot 10000 \Rightarrow x \approx 60$ år
d) $y'(10) = 8.5\cdot 10^{-6}y(10)\big(10000-y(10)\big) \approx 83$ st/år

3509.
a) $y' = 0.007y(t)\big(200-y(t)\big), y(0) = 30$ st
b) WolframAlpha ger $y(x) = \frac{200e^{1.4x}}{5.67+e^{1.4x}}$
d)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{200e^{1.4x}}{5.67+e^{1.4x}} = 200$$

3510. $y(0) = 65, y(1) = 98$ och $y(2) = 142$

$$y' = ky(M-y)$$

Lösningen är av formen: $y(x) = \frac{Me^{ax}}{b+e^{ax}}$

Med WolframAlpha:
solve m/(b+1)=65 and mexp(a)/(b+exp(a))=98 and mexp(2a)/(b+exp(2a))=142
får man direkt $a = \ln\left(\frac{213}{130}\right), b = \frac{7029}{1105}$ och $M = \frac{8134}{17}$ dvs:

$$y(x) \approx \frac{478e^{x\ln\frac{213}{130}}}{6.4+e^{x\ln\frac{213}{130}}}$$

För att hitta *k*, $\frac{d}{dy}\frac{Me^{ax}}{b+e^{ax}} = k\frac{Me^{ax}}{b+e^{ax}}\left(M-\frac{Me^{ax}}{b+e^{ax}}\right)$

$$\frac{d}{dy}\left(Me^{ax}(b+e^{ax})^{-1}\right) = k\frac{Me^{ax}}{b+e^{ax}}\left(M-\frac{Me^{ax}}{b+e^{ax}}\right)$$

$$M\left(ae^{ax}(b+e^{ax})^{-1} - e^{ax}ae^{ax}(b+e^{ax})^{-2}\right) = k\frac{Me^{ax}}{b+e^{ax}}\left(M-\frac{Me^{ax}}{b+e^{ax}}\right)$$

$$\frac{ae^{ax}}{b+e^{ax}}\left(1-\frac{e^{ax}}{b+e^{ax}}\right)=k\frac{Me^{ax}}{b+e^{ax}}\left(1-\frac{e^{ax}}{b+e^{ax}}\right)\Rightarrow$$

$$k=\frac{a}{M}=\frac{17}{8134}\ln\left(\frac{213}{130}\right)\approx 0.001\text{ år}^{-1}$$

b)

$$(x)\approx\frac{478e^{x\ln\frac{213}{130}}}{6.4+e^{x\ln\frac{213}{130}}}=300\Rightarrow 178e^{x\ln\frac{213}{130}}=300\cdot 6.4\Rightarrow x\approx 4.8\text{ år}=4\text{ år och 10 mån}$$

c) $y(x_{\text{maxtillv}})=\frac{478e^{x\ln\frac{213}{130}}}{6.4+e^{x\ln\frac{213}{130}}}=\frac{478}{2}\Rightarrow\frac{e^{x\ln\frac{213}{130}}}{6.4+e^{x\ln\frac{213}{130}}}=\frac{1}{2}\Rightarrow e^{x\ln\frac{213}{130}}=6.4\Rightarrow$
$x\approx$3 år och 9 månader

3603. $y''+4y'+4y=0$
a) $y=Ce^{-2x}, y'=-2Ce^{-2x},\ y''=4Ce^{-2x}\Rightarrow$

$$4Ce^{-2x}-8Ce^{-2x}+4Ce^{-2x}=0$$

b) $y=Cxe^{-2x}, y'=Ce^{-2x}-2Cxe^{-2x},\ y''=-2Ce^{-2x}-2C(e^{-2x}-2xe^{-2x})=$

$$=-4Ce^{-2x}+4Cxe^{-2x}\Rightarrow(-4Ce^{-2x}+4Cxe^{-2x})+4(Ce^{-2x}-2Cxe^{-2x})+4Cxe^{-2x}=$$

$$=-4Ce^{-2x}+4Cxe^{-2x}+4Ce^{-2x}-8Cxe^{-2x}+4Cxe^{-2x}=0$$

3604.
a) $r^2+r-2=0\Rightarrow r=-1\pm\sqrt{2.25}=-0.5\pm 1.5=\begin{cases}1\\-2\end{cases}\Rightarrow y(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$
b) $r^2+0.2r-0.8=0\Rightarrow r=-0.1\pm 0.9=\begin{cases}0.8\\-1\end{cases}\Rightarrow y(x)=C_1e^{0.8x}+C_2e^{-x}$
c) $3r^2-6r=0\Rightarrow r=\begin{cases}0\\2\end{cases}\Rightarrow y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{0x}=C_1e^{2x}+C_2$

3605. d)

$$y''+9y'=0\Rightarrow r^2+9=0\Rightarrow r=\pm 3i$$

Detta är fallet två rent imaginära rötter till den karakteristiska ekvationen. Enligt formelbadet är lösningen:

$$y(x)=C_1\sin rx+C_2\cos rx\ \text{ men } y(0)=0\ \Rightarrow C_2=0\text{ dvs } y(x)=C_1\sin rx$$

$$y'=rC_1\cos rx\ \text{ men } y'(0)=1.5\Rightarrow C_1=0.5\Rightarrow y(x)=0.5\sin 3x$$

3607. Matas WolframAlpha med: $y'+2y=-5\sin x, y(0)=4$ fås direkt:

$$y(x)=3e^{-2x}-2\sin(x)+\cos(x)$$

En alternativ väg är att först lösa den partikuljära differentialekvationen:

$$y_p = A\sin x + B\cos x \Rightarrow y_p' = A\cos x - B\sin x$$

Insatt ger:

$$A\cos x - B\sin x + 2(A\sin x + B\cos x) = -5\sin x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ -B + 2A = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow y_p = -2\sin x + \cos x$$

Och sedan behandla den homogena differentialekvationen $y_h{}' + 2y_h = 0 \Rightarrow y_h = Ce^{-2x}$. Totalt fås:

$$y(x) = Ce^{-2x} + \cos x - 2\sin x \text{ och } y(0) = 4 \Rightarrow y(x) = 3e^{-2x} + \cos x - 2\sin x$$

3608. $y'' + 2y' - 8y = 0 \Rightarrow r^2 + 2r - 8 = 0 \Rightarrow r = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3$

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x}, \qquad y'(x) = 2C_1e^{2x} - 4C_2e^{-4x}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 - 4C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -6C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{3} \\ C_2 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{1}{3}(e^{2x} - e^{-4x})$$

3609.

$$y'' + 0.4y' + 5y = 0 \Rightarrow r^2 + 0.4r + 5 = 0 \Rightarrow r = -0.2 \pm \sqrt{0.2^2 - 5} =$$

$$= -0.2 \pm 2.2i \Rightarrow y(t) = Ce^{-0.2x} \cdot \sin 2.2t$$

$$y' = -0.2Ce^{-0.2x} \cdot \sin 2.2t - 2.2Ce^{-0.2x} \cdot \cos 2.2t$$

$$y'(0) = 2 \Rightarrow C = -0.91 \Rightarrow y(t) = -0.91e^{-0.2x} \cdot \sin 2.2t$$

3610.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2x \Rightarrow x'' + 2x = 0 \Rightarrow r^2 + 2 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{2}i$$

Då sin och cos har samma frekvens räcker det med den ena funktionen. $x(0) \neq 0$ ger att vi väljer cosinus.

$$x(t) = C\cos\sqrt{2}t, x(0) = 5.2 \Rightarrow C = 5.2 \Rightarrow x(t) = 5.2\cos\sqrt{2}t$$

$$x(t) = 0 \text{ då } \sqrt{2}t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \approx 1.1\ s$$

3611. a)

$$y'' = -0.16y \Rightarrow y'' + 0.16y = 0 \Rightarrow r^2 + 0.16 = 0 \Rightarrow r = \pm 0.4i$$

$$y(t) = C\sin 0.4t + 0.075\cos 0.4t \Rightarrow y'(t) = 0.4C\cos 0.4t - 0.075 \cdot 0.4\sin 0.4t$$

$$y'(0) = 0.03 \Rightarrow 0.4C = 0.03 \Rightarrow C = 0.075$$

$$y(t) = 0.075\sin 0.4t + 0.075\cos 0.4t$$

b) $d_{max} = \sqrt{0.075^2 + 0.075^2} \approx 0.11$ m

3612. Frågan är något felställd.
Här är först lösningen om strömmen i spolen är noll från början dvs $i_l(0) = 0$.

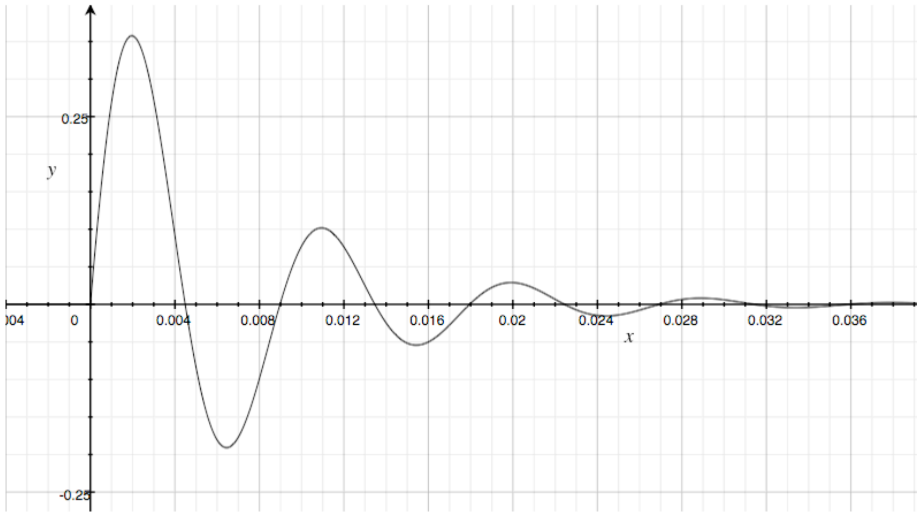
$i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{1}{LC}i = 0, i(0) = 0 \; och \; i'(0) = \frac{U}{L} \approx 337$

$r^2 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow r = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \approx -140 \pm 700j \Rightarrow$

$i(t) = Ce^{-140t}\sin 700t \Rightarrow i'(t) = C700e^{-140t}\cos 700t - 140Ce^{-140t}\sin 700t$

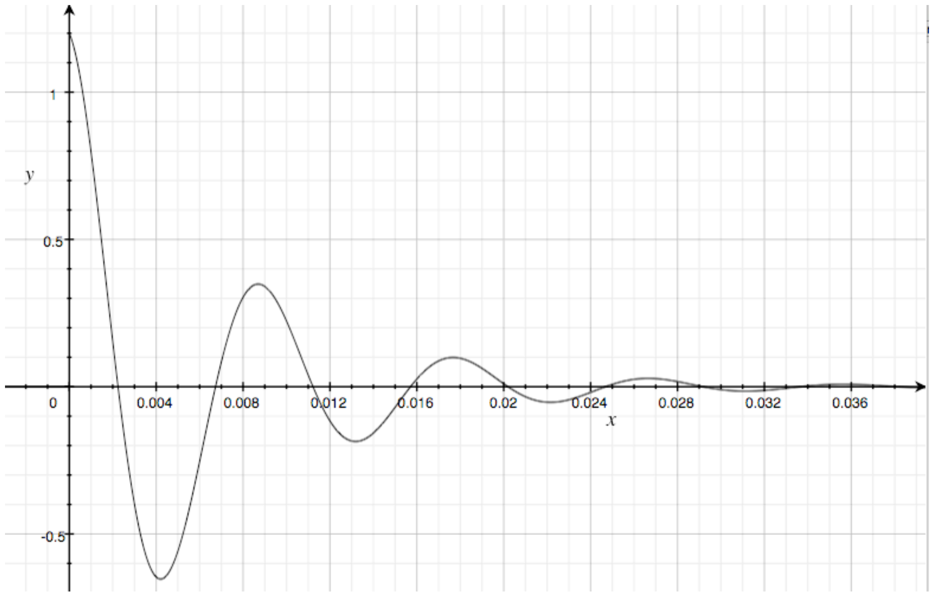
$i'(0) = 337 = 700C \Rightarrow C \approx 0.48$

$i(t) = 0.48e^{-140t}\sin 700t$ A



Nu till lösningen om spolen är kopplad parallellt med kondensatorn från början och sålunda har en begynnelseström $i_l(0) = \frac{U}{R}$.

$i(t) = Ce^{-140t}\cos 700t \Rightarrow i(t) = 1.2e^{-140t}\cos 700t$



3701.
a) $y' = 0.031(27 - y)$ °/min
b) $y'(20) = 0.031(27 - 20) \approx 0.22$ °/min
c) $y(t) = 27 - 19e^{-0.031t}$
d) $y(t) = 27 - 19e^{-0.031t} = 22 \Rightarrow \; e^{-0.031t} = \frac{5}{19} \Rightarrow t \approx 43$ min

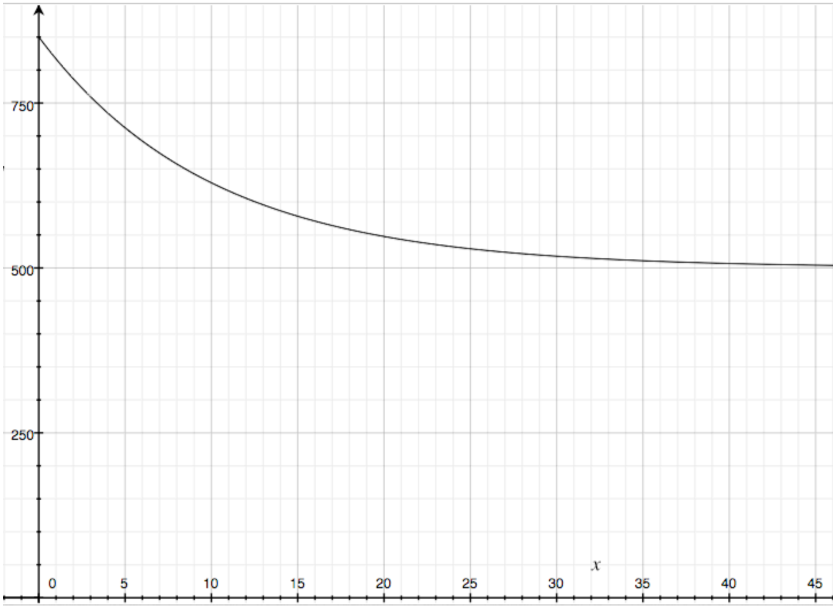
3702. a) 50 kg är tillskottet/år och $0.1m$ är de 10 % av föroreningarna som försvinner/år.

b) $m' = 50 - 0.1m = 0.1(500 - m)$, och $m(0) = 850$

$m(t) = 500 + 350e^{-0.1t}$

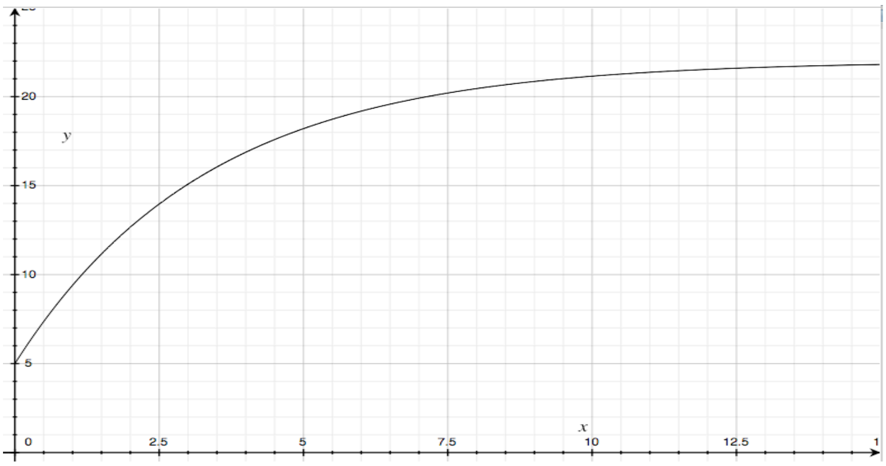
c) $m(5) = 500 + 350e^{-0.5} \approx 710$ kg

d) $m(\infty) = 500$ kg



3703. $y(x) = 100e^{-x/200}$
$y(x) = 100e^{-x/200} = 75 \Rightarrow e^{-x/200} = 0.75 \Rightarrow t = 58$ l

3704. $y' = -0.3(y - 22)$ °/min
$y(t) = 22 - 17e^{-0.3t}$ °C $\Rightarrow y(5) \approx 18$°C



3705. se exempel 2 sid 143

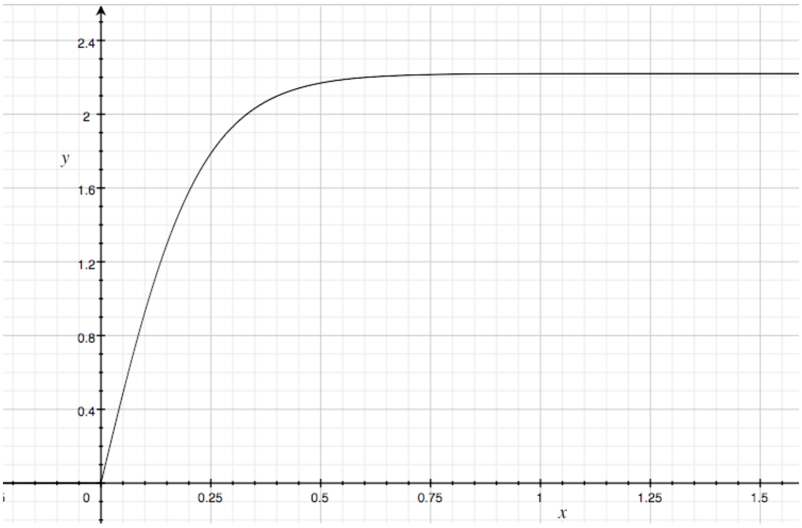
a) $F = am = v'm = mg - kv^2 \Rightarrow v' = g - \frac{k}{m}v^2 = 9.82 - 2v^2$

b) Med hjälp av WolframAlpha får vi: $v(t) = \frac{2.22e^{8.9t} - 2.22}{e^{8.9t} + 1} = 2.22 - \frac{4.44}{e^{8.9t} + 1}$

2.2 m/s

c) $v'(v = 0) = g - \frac{k}{m}v^2(0) = 9.82 - 2(0)^2 = 9.82 \text{ m/s}^2$

$v'(v = 2) = 9.82 - 2(2)^2 \approx 1.82 \text{ m/s}^2$



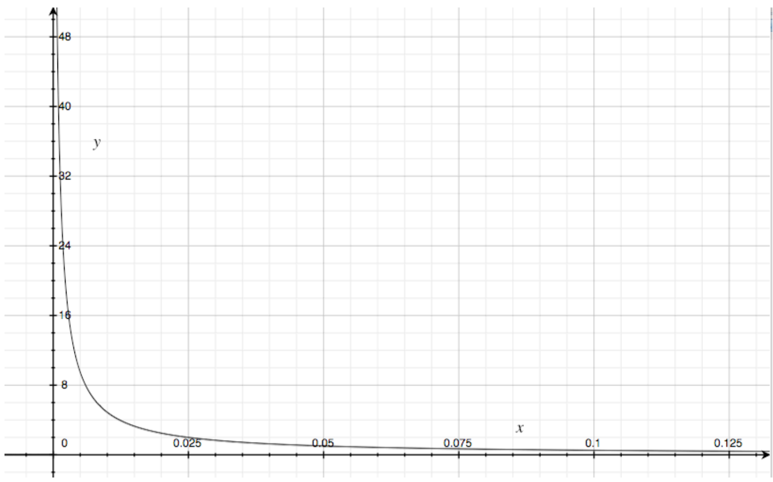
3706. a) $F = am = v'm = -kv^2 \Rightarrow v' = -\frac{k}{m}v^2 = -20v^2$

$$\frac{dv}{dt} = -20v^2 \Leftrightarrow \frac{dv}{v^2} = -20dt \Leftrightarrow -\frac{1}{v} = -20t + C$$

$$v(t) = \frac{1}{20t + C}, v(0) = 180 \Rightarrow v(t) = \frac{180}{3600t + 1}$$

b) $(0.001) = \frac{180}{3.6+1} \approx 39 \text{ m/s}$

c)



3707. a) $y' = -0.027\big(y-(-20)\big)$ det är -20° C.

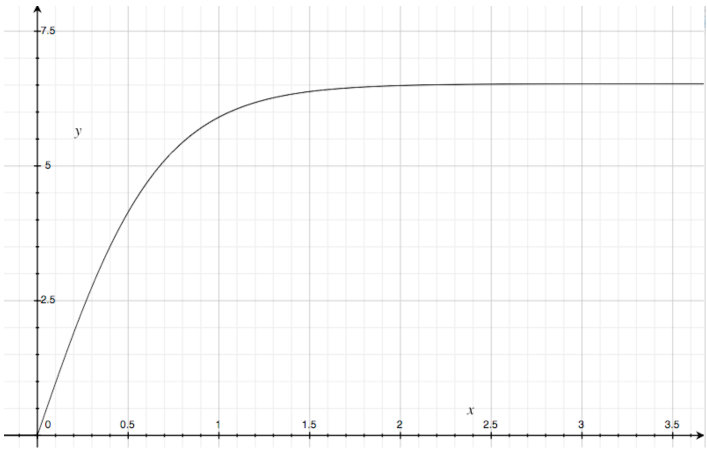
b) Då kaffets temperatur närmar sig -20° C går förändringen mot 0. (En mera realistisk modell tar hänsyn till övergången mellan vätska och fruset kaffe, men det lämnas till kurser i fysik.)

3708.
a) $T'(t) = -k(T(t)-T_o) \Rightarrow T'(t) = -k(T(t)-21), T(t) = 61e^{-kt}+21$
$T(1) = 61e^{-k}+21 = 71 \Rightarrow k \approx 0.2$

b) $(t) = 61e^{-0.2t}+21 = 45 \Rightarrow t \approx 4.7$ min

3709. a) $F = am = y'm = mg - ky^2 \Rightarrow y' = g - \frac{k}{m}y^2 = 9.82 - \frac{18}{78}y^2$

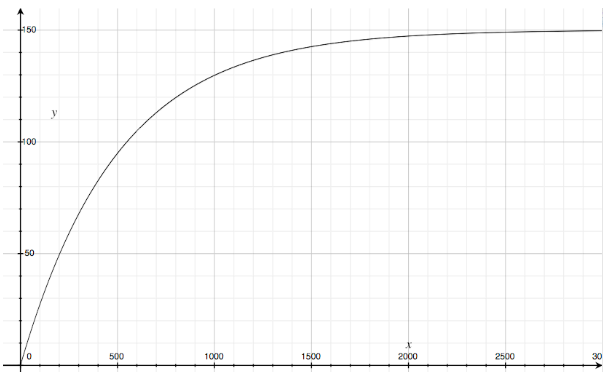
$y' = \frac{dy}{dt} = 9.82 - \frac{18}{78}y^2$ WolframAlpha ger $y(t) = \frac{6.52(e^{3x}-1)}{e^{3x}+1} \Rightarrow y(\infty) = 6.52$ m/s



3710.

$$y'(t) = 50 \cdot 0.006 - \frac{50}{25000}y(t) = 0.3 - \frac{1}{500}y(t) = \frac{1}{500}\big(150 - y(t)\big)$$

$$y(t) = 150(1-e^{-0.002t})$$



3711. a)

$$\frac{da}{dt} = -0.6a \Rightarrow a(t) = 24e^{-0.6t}$$

b)

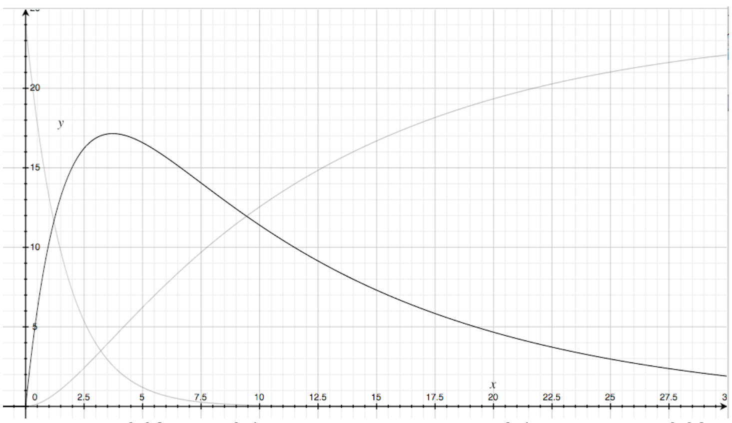
$$b'(t) = 0.6a - 0.09b = 14.4e^{-0.6t} - 0.09b \Rightarrow$$

$$b(t) = 28.2(e^{-0.09t} - e^{-0.6t})$$

c) $c'^{(t)} = 0.09b(t) = 0.09 \cdot 28.2(e^{-0.09t} - e^{-0.6t}) \Rightarrow c(t) = 2.54\left(\frac{1}{-0.09}e^{-0.09t} - \frac{1}{-0.6}e^{-0.6t}\right)$

$\Rightarrow c(t) = 4.2e^{-0.6t} - 28.2e^{-0.09t} + 24$

d)



e) $a(t) = 24e^{-0.6t} = 28.2(e^{-0.09t} - e^{-0.6t}) = b(t) \Rightarrow 52.2e^{-0.6t} = 28.2e^{-0.09t} \Rightarrow$

$$e^{-0.6t + \ln 52.2} = e^{-0.09t + \ln 28.2} \Rightarrow -0.6t + \ln 52.2 = -0.09t + \ln 28.2 \Rightarrow t = 1.21 \text{ s}$$

f) $b(t) = 28.2(e^{-0.09t} - e^{-0.6t}) \Rightarrow b'(t) = 28.2(-0.09e^{-0.09t} + 0.6e^{-0.6t}) = 0$

$$\Rightarrow 0.09e^{-0.09t} = 0.6e^{-0.6t} \Rightarrow \ln 0.09 - 0.09t = \ln 0.6 - 0.6t \Rightarrow t \approx 3.72$$

$$b(3.72) \approx 17.2\ \mu\text{g}$$

g) $a(5) \approx 1.19\ \mu\text{g}, b(5) \approx 16.6\ \mu\text{g},\ +c(5) \approx 6.23\ \mu\text{g}$

Test 3

Sid 149-150

1.

$$2y' = -0.8y \Leftrightarrow y' = -0.4y \Rightarrow y(x) = Ce^{-0.4x} \text{ men } y(0) = -4 \Rightarrow y(x) = -4e^{-0.4x}$$

2. Sök den primitiva funktionen 2 gånger.

$$y'' = 12x^2, y' = 4x^3 + C \; och \; y = x^4 + Cx + D$$

3. svaren i boken är inte direkt fel, men underliga. Metoden som används nedan kommer i kapitel 4.

a) $\frac{dA}{dt} = \frac{d\pi r^2}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$

b) $\frac{dA}{dt} = \frac{d4\pi r^2}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$

c) $\frac{dV}{dt} = \frac{d\frac{4}{3}\pi r^3}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

d) $\frac{dV}{dt} = kA$

4. Modellen förutsätter exponentiell tillväxt (något orimligt).

$$\frac{dN}{dt} = kN, 6 = k \cdot 42 \Rightarrow N'(t) = \frac{1}{7}N(t)$$

5.

$$y(x) = Ce^{-3x} \text{ men } y(0) = 2 \Rightarrow y(x) = 2e^{-3x} \; och \; y'(x) = -6e^{-3x}$$

Detta ger tangentens ekvation: $y - 2 = -6(x - 0)$ dvs $y = 2 - 6x$

7. a) Värdeminskningen är 35 % per år. (Det är värt att notera att det **inte** är värdeminskningen $V(t) = V_0 \cdot 0.65^t$ som differentialekvationen totalt beskriver.)

b) $V(t) = V_0 e^{-0.35 \cdot t} \Rightarrow V(3) = 420\,000 e^{-0.35 \cdot 3} \approx 147\,000$ kr

8. Använd Newton avsvalningslag där temperaturen börjar i 95 ° och svalnar av mot 21 °.

a)

$$T(t) = 21 + 74e^{-kt} = 21\left(1 + \frac{74}{21}e^{-kt}\right) \text{ och } T(5) = 21\left(1 + \frac{74}{21}e^{-k5}\right) = 65 \Rightarrow k \approx -0.104$$

b)

$$T(t) = 21 + 74e^{-0.104t} = 45 \Rightarrow t \approx 11 \text{ min}$$

11.

$$F = m \cdot a = m \cdot v' = mg - k \cdot v^{1.8} \Rightarrow v' = g - \frac{k}{m} \cdot v^{1.8} \text{ m/s}$$

Maximal hastighet fås då $v'(t) = 0$ dvs då $g = \frac{k}{m} v^{1.8} \Rightarrow v_{max} = \left(\frac{mg}{k}\right)^{\frac{1}{1.8}} \approx 30 \text{ m/s}$.

12. Använd den logistiska tillväxtekvationen:

$$S' = 0.003 \cdot S(S_{max} - S) \text{ där } S_{max} = 100\,000$$

$$S(t) = \frac{100\,000 \cdot e^{0.3t}}{9 + e^{0.3t}} \Rightarrow S(21) = \frac{100\,000 \cdot e^{4.2}}{9 + e^{4.2}} \approx 28\,000 \text{ st}$$

13. Använd den karakteristiska ekvationen:

$$y'' + 4y' - 5 = 0 \Rightarrow r^2 + 4r - 5 = (r - 1)(r + 5) = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -5 \Rightarrow$$

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-5x} \Rightarrow y'(x) = C_1 e^{-x} - 5C_2 e^{-5x}$$

Begynnelsevillkoren ger:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - 5C_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -4/3 \\ C_1 = 4/3 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \frac{4}{3}(e^{-x} - e^{5x})$$

14. Det som krävs är att den karakteristiska ekvationen har rötterna $r = 3$ och $r = -3$ dvs:

$$(r - 3)(r + 3) = r^2 - 9 = 0 \Rightarrow y'' - 9y = 0$$

15.

$$\frac{dp(h)}{dh} = -kp(h) \Rightarrow p(h) = P_0 \cdot e^{-kh}$$

(Det står fel facit i uppgiften. Det borde stått att trycket faller proportionellt mot trycket (inte proportionellt mot höjden)).

b) $48.3 = 101.3e^{-k5} \Rightarrow k = 0.148 \text{ km}^{-1}$

c) $101.3e^{-0.148 \cdot 8.5} \approx 28.8$ kPa

16.

$$y' = ky(M - y) \Leftrightarrow y(x) = \frac{Me^{Mkx}}{C + e^{Mkx}}$$

$$y' = 0.000085(5000 - y) \Rightarrow y(t) = \frac{5000e^{0.425t}}{49 + e^{0.425t}}$$

a) $y(2) = \frac{5000e^{0.85}}{49+e^{0.85}} \approx 230$ fiskar

b) $y(4) = \frac{5000e^{1.7}}{49+e^{1.7}} \approx 500$ fiskar

c) När 5000 är uppnått är tillväxten $y' = 0$, dvs max 5000 fiskar.

d) $\frac{5000e^{0.425t}}{49+e^{0.425t}} = 2500 \Rightarrow 2e^{0.425t} = 49 + e^{0.425t} \Rightarrow t = \frac{\ln 49}{0.425} \approx 9$ månader

17. a) $v'(t) = -\frac{12}{800}v^2(t) = -0.015v^2(t)$

b) WolframAlpha ger: $v(t) = \frac{200}{3t-200c_1} = \frac{\frac{200}{3}}{t-\frac{200c_1}{3}}, y(0) = 35 \Rightarrow \; v(t) = \frac{200/3}{t+\frac{200}{3\cdot 35}} \approx \frac{67}{t+1.9}$

c) $v(3) \approx 14$ m/s

d) $v(t) = s'(t) \Rightarrow s(t) = 67\ln(t + 1.9) - 43 \Rightarrow s(3) = 67\ln(3 + 1.9) - 43 \approx 63$ m

Blandade uppgifter

Blandade uppgifter sid 151-155

4.

5.

$$2\frac{dy}{dx} - y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}y = 0 \Rightarrow y(x) = Ce^{0.5x} \text{ och } (0,3) \text{ ger } y(x) = 3e^{0.5x}$$

6. $\frac{dy}{dx} = -2y$ ger direkt att $y(x) = Ce^{-2x}$ och punkten $(1,2)$ att $2 = Ce^{-2}$ dvs $C = 2e^2$.

$$y(x) = 2e^2 \cdot e^{-2x} = 2 \cdot e^{2-2x} \;\Rightarrow y' = -4 \cdot e^{2-2x} \Rightarrow$$

Tangenten får beskrivningen: $y - 2 = -4(x - 1) \Rightarrow y = -4x + 6$

7. Använd den karakteristiska ekvationen:

$$y'' + 4y' - 12y = 0 \Rightarrow r^2 + 4r - 12 = (r + 6)(r - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = -6 \end{cases}$$

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{-6x} \Rightarrow y'(x) = 2Ae^{2x} - 6Be^{-6x} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - 6B = 3 \end{cases} dvs \begin{cases} A = 3/8 \\ B = -3/8 \end{cases}$$

Svar: $y(x) = \frac{3}{8}(e^{2x} - e^{-6x})$

8. $y' + 3y = 0 \Rightarrow y' = -3y$ i $(0, -2)$ är $k = y'(0) = -3 \cdot y = -3(-2) = 6$.

11.

$$2y' + \frac{4}{x}y = \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x} \Leftrightarrow xy' + 2y = \frac{4}{x} - 2$$

Högerledets utseende gör att man kan prova med att ansätta:

$$y = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + C \Rightarrow y' = -2\frac{A}{x^3} - \frac{B}{x^2}$$

$$x\left(-2\frac{A}{x^3} - \frac{B}{x^2}\right) + 2\left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + C\right) = \frac{4}{x} - 2$$

$$-2\frac{A}{x^2} - \frac{B}{x} + \frac{2A}{x^2} + \frac{B2}{x} + 2C = \frac{4}{x} - 2$$

$$\begin{cases} A = \text{godtyckligt} \\ B = 4 \\ C = -1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{A}{x^2} + \frac{4}{x} - 1$$

12. $y' - \sin(x) \cdot y = 0$ ansätt $y = Ce^{-\cos x} \Rightarrow y' = C\sin x \ e^{-\cos x}$ och $y(x) = 8e^{-\cos x}$

13. $f''(x) + 9f(x) = 0 \Rightarrow r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm 3i \Rightarrow f(x) = A\sin 3x + B\cos 3x$

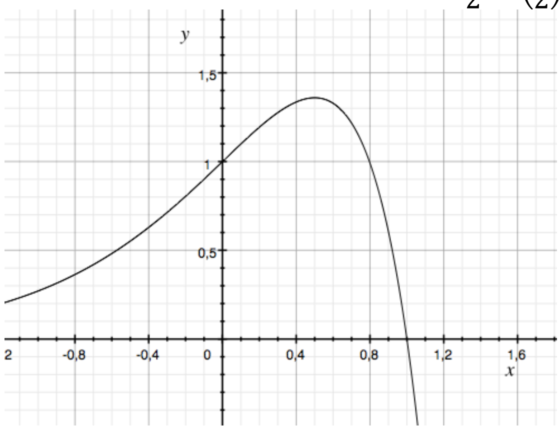
$$f'(x) = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x \Rightarrow B = 4 \text{ och } A = \frac{5}{3}$$

$$f(x) = \frac{5}{3}\sin 3x + 4\cos 3x \ \ f_{max}(x) = \sqrt{\frac{25}{9} + 16} = \frac{13}{3}$$

14. $y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0 \Rightarrow r = 2$, dubbelrot

$$y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} \Rightarrow \begin{cases} Ae^2 + Be^2 = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = e^{2x} - xe^{2x} = e^{2x}(1-x)$$

$$\Rightarrow y'(x) = 2e^{2x}(1-x) - e^{2x} = 0 \text{ då } x = \frac{1}{2}, y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e}{2}$$



15.

$$1400 = 900 \cdot a^2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{14}}{3}; N(5) = 900 \cdot \left(\frac{\sqrt{14}}{3}\right)^5 \approx 2\,700 \text{ st}$$

16. Den logistiska tillväxtekvationen:

$$y' = ky(M - y) \Leftrightarrow y(x) = \frac{Me^{Mkx}}{C + e^{Mkx}}$$

a) I det här fallet är: $k = 0.003$ och $M = 500 \Rightarrow y(x) = \frac{500e^{1.5x}}{49+e^{1.5x}} \Rightarrow y(1) \approx 42, y(4) \approx 446$

b) $y'(1) = 0.003y(1)\big(500 - y(1)\big) \approx 58\ \frac{\text{flugor}}{\text{dygn}}$ och $y'(4) \approx 72\ \frac{\text{flugor}}{\text{dygn}}$

17. a) 10 % tillväxt i början betyder att $y'(0) = 4$

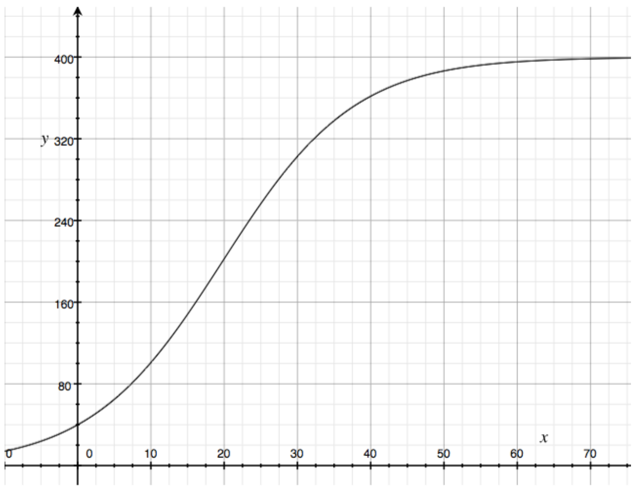
$$y' = ky(M - y) \Leftrightarrow 4 = k \cdot 40(400 - 40) \Rightarrow k = 2.8 \cdot 10^{-4}$$

b)

$$y' = 2.8 \cdot 10^{-4} y(400 - y)$$

c)

$$y(x) = \frac{400e^{0.11x}}{9 + e^{0.11x}} = 300 \Leftrightarrow x \approx 30 \text{ år}$$



19. $\frac{dP}{dt} = kP \Rightarrow P(t) = Ce^{kt}$ Fram: $2.5 = 2.8e^{-k_1 6} \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{6}\ln\frac{2.5}{2.8} \Rightarrow P_{fram}(20) = 1.9$ bar

$$\text{Bak: } 2.6 = 2.8e^{-k_2 6} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{6}\ln\frac{2.6}{2.8} \Rightarrow P_{bak}(20) = 2.2 \text{ bar}$$

Skillnaden är: $P_{bak}(20) - P_{fram}(20) = 2.8\big(e^{-20k_2} - e^{-20k_1}\big) \approx 0.268$ bar högre bak.

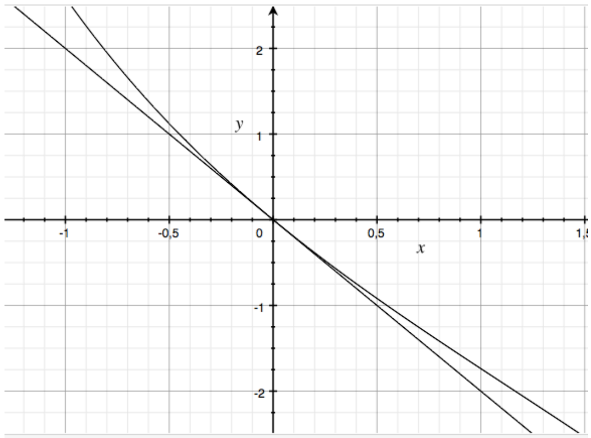
20. Ekvationen saknar funktionen y efter faktorn 0.32. Såhär borde den sett ut:

$$y'' + 0.4y' - 0.32y = 0 \Rightarrow r = -0.2 \pm \sqrt{0.2^2 + 0.32} = -0.2 \pm 0.6 = \begin{cases} 0.4 \\ -0.8 \end{cases}$$

$$y(x) = C_1 e^{0.4x} + C_2 e^{-0.8x}, y'(x) = 0.4C_1 e^{0.4x} - 0.8C_2 e^{-0.8x} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 0.4C_1 - 0.8C_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 1.2C_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -C_1 = \dfrac{3}{5} \\ C_1 = -\dfrac{2}{1.2} = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{5}{3}e^{-0.8x} - \frac{5}{3}e^{0.4x}$$



21. a) Faktorn $(6000 - N)$ betyder att ju närmare populationen kommer 6000 st, desto mindre blir ökningen, dvs tillväxten stannar av.

b) Tillväxten är störst vid halva den maximala populationen dvs då $N = 3000$.

$$3000 = \frac{6000}{6.5e^{-0.04848t} + 1} \Rightarrow 6.5e^{-0.04848t} + 1 = 2 \Rightarrow t = 38.6 \text{ min}$$

22.

a) $N' = -1.79 \cdot 10^{-9} N(t) \Rightarrow N(t) = 2 \cdot 10^{23} e^{-1.79 \cdot 10^{-9} t}$

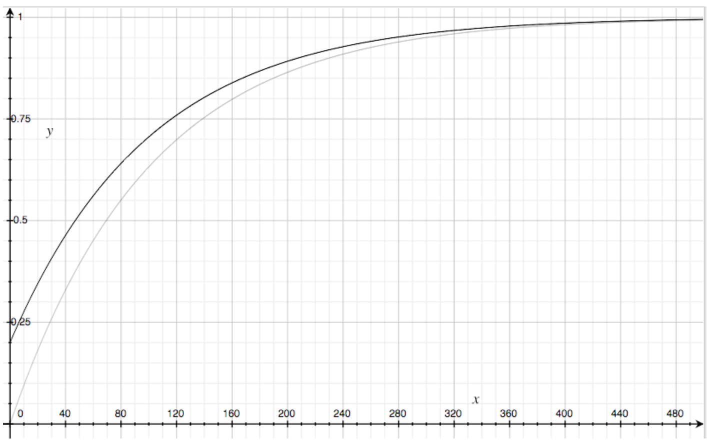
b) $N'(0) = -1.79 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{23} \approx -3.6 \cdot 10^{14}$ st/s

c) $N(0) - N(1 \text{ år}) = 2 \cdot 10^{23}\left(1 - e^{-1.79 \cdot 10^{-9} 1\text{år}}\right) \approx 1.1 \cdot 10^{22}$st dvs ca 5.5 %

23. a) $p' = k(p_a - p) \Rightarrow p(t) = 1 - e^{-0.01t}$

b) $p(t) = 1 - 0.8e^{-0.01t}$

c)



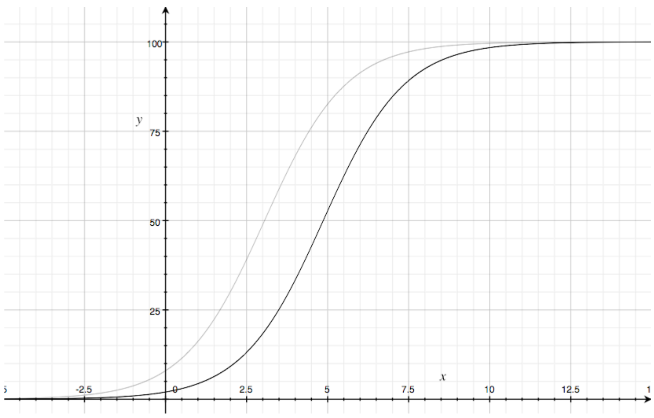
d) $(t) = 1 - e^{-0.01t} = 0.9 \Rightarrow t \approx 230$ s

24. $y' = 0.008y(100 - y),\ y(0) = 8 \Rightarrow y(t) = \frac{100e^{0.8t}}{11.5 + e^{0.8t}}$

$y(3) \approx 49$ st, ca 20 st/dag

$$y' = 0.008y(100 - y), y(0) = 2 \Rightarrow y(t) = \frac{100e^{0.8t}}{49 + e^{0.8t}}$$

$y(3) \approx 18$ st, ca 12 st/dag



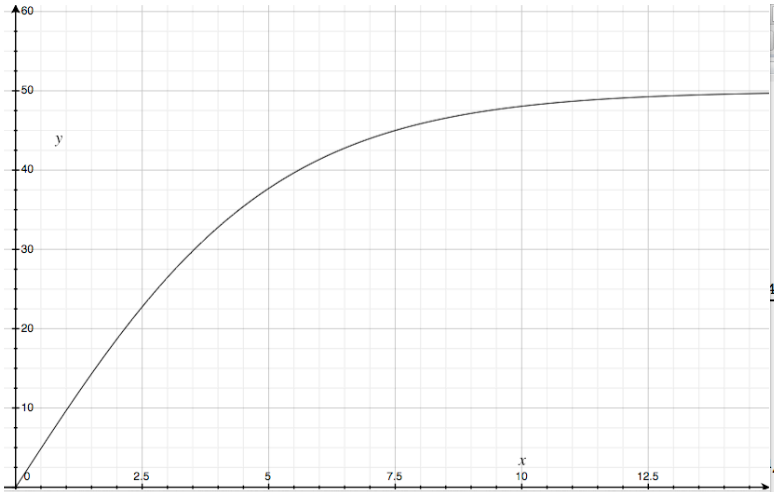
25. (Det är tyvärr flera fel i facit i den här uppgiften.)

$$F = am = v'm = mg - kv^2 \Rightarrow v' = g - \frac{k}{m}v^2 = 9.82 - \frac{k}{80}v^2$$

a) Vid den maximala hastigheten 50 m/s är $v' = 0$ dvs

$$\Rightarrow 0 = 9.82 - \frac{k}{80}v^2 \Rightarrow 9.82 = \frac{k}{80}50^2 \Rightarrow k = 0.314\ /\text{m}$$

b) $v' = g - \frac{k}{m}v^2 = 9.82 - \frac{0.314}{80}v^2 \Rightarrow v(t) = 50\frac{e^{0.393t} - 1}{e^{0.393t} + 1}$ m/s



c) $v(3) \approx 26\ \text{m/s}, \ v(8) \approx 46\ \text{m/s}$

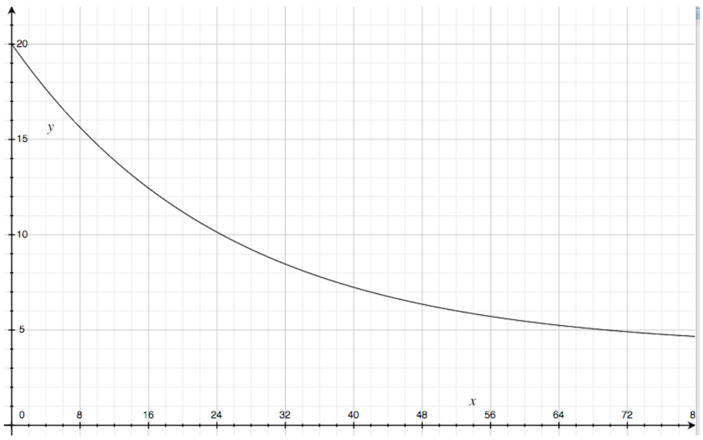
26.

$$y' = -Cy \Rightarrow y(t) = Ce^{-at} = \begin{Bmatrix} y(0) = 1 \\ y(3) = 0.2 \end{Bmatrix} = e^{t\frac{\ln 0.2}{3}} \approx e^{-0.536t}$$

$$y(12) = e^{-0.536\cdot 12} \approx 0.0016\ \%$$

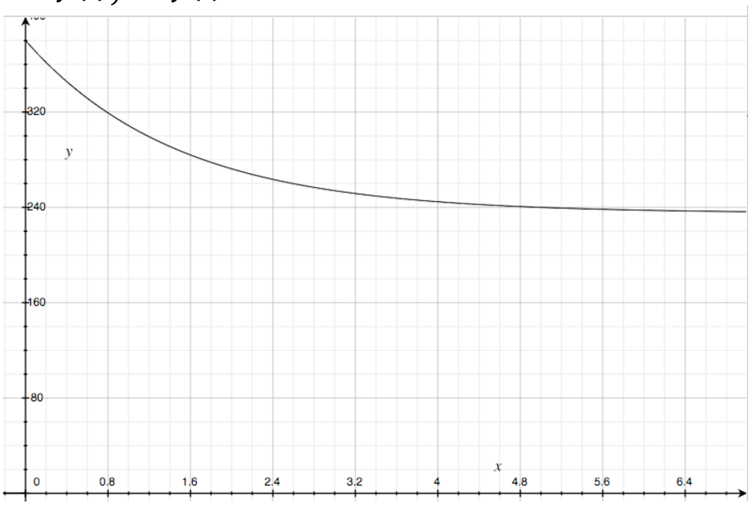
27. a) $T' = k(T - T_{\text{rum}}) = -0.04(T - 4) \Rightarrow T(t) = 4 + 16e^{-0.04t}\ °\text{C}$

b) $10 = 4 + 16e^{-0.04t_{10}} \Rightarrow t_{10} \approx 24\ \text{min och } t_5 \approx 69\ \text{min}$

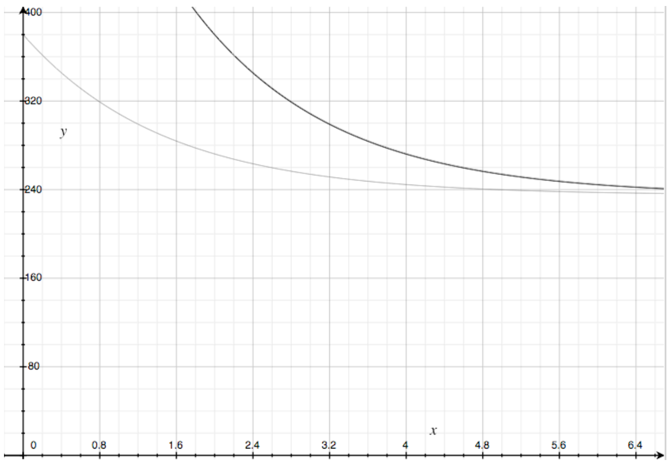


28. a) $y'(t) = 160 - 0.68y(t), y(0) = 380$ mg

b) $y'(t) = 0.68\big(235 - y(t)\big) \Rightarrow y(t) = 145e^{-0.68t} + 235$



c) Om den initiala dosen görs större kommer tiden det tar att nå slutvärdet 235 mg bli längre. Exempel 800 mg i grafen nedan.



d) Om den dagliga dosen ökas kommer slutvärdet att stanna på ett högre värde.

e) Hur stor den dagliga dosen är.

29. $T' = k(T_{\text{Rum}} - T)$, ju närmare T kommer T_{Rum}, desto mindre blir derivatan. Om $T_{\text{Rum}} > T$ initialt är derivatan positiv och T stiger. Är $T_{\text{Rum}} < T$ initialt är derivatan negativ och T minskar (svalnar).

30.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = k \Rightarrow f'(x) = kf(x) \Rightarrow f''(x) = kf'(x) = kkf(x) = k^2 f(x)$$

$$f^{(n)}(x) = k^n f(x) \Rightarrow \frac{f^{(n)}(x)}{f(x)} = k^n$$

31.

a) $v'(t) = 10 - 20v(t)$

b) $v'(t) = 10 - 20v(t) = 20\big(0.5 - v(t)\big) \Rightarrow v(t) = 0.5(1 - e^{-20t})$

c) 0.5 m/s

32.

$$F = am = v'm = mg - kv \Rightarrow v' = g - \frac{k}{m}v, v' = 0 \text{ då } v = \frac{gm}{k}$$

33. a) $y'(t) = 20 \cdot 2 - \frac{20}{10000}y(t) = 40 - \frac{1}{500}y(t) = \frac{1}{500}\big(20\,000 - y(t)\big)$

$y(t) = 20\,000\left(1 - e^{-\frac{t}{500}}\right)$

b) $y(t) = 20\,000\left(1 - e^{-\frac{t}{500}}\right) = 6000 \Rightarrow t \approx 178$ s

c) $\frac{20\,000 \text{ mg}}{10\,000 \text{ l}} = 2$ mg/l