Matematik 5 svar

Kapitel 2

2113.

$$\frac{n^3-n}{3}=\frac{n(n^2-1)}{3}=\{\text{konjugatregeln}\}=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

Av tre på varandra följande tal måste ett vara delbart med 3.

2116. Faktorisera polynomet.

$$a^2+3a+2=(a+1)(a+2)$$

Dvs om $a+1$ är delbart med 5 är även a^2+3a+2 delbart med 5.

2206. Uppgiften är något otydlig. Hur svaret i facit blivit till i a) är svårt att förstå.

a) $\frac{25}{n}=2+\frac{r}{n}\Rightarrow 25=2n+r$ om $n=12$ blir resten $r=1$.

b) $\frac{25}{n}=5+\frac{r}{n}\Rightarrow 25=5n+r$ om $n=5$ blir resten $r=0$.

c) $\frac{25}{n}=4+\frac{r}{n}\Rightarrow 25=4n+r$ om $n=6$ blir resten $r=1$.

d) $\frac{25}{n}=12+\frac{r}{n}\Rightarrow 25=12n+r$ om $n=2$ blir resten $r=1$.

2309. $n^2\equiv 0\ eller\ n^2\equiv 1\ (\text{mod } 3)$
För restklass 0 gäller $n=3k$ och $n^2=9k^2=3\cdot 3k^2\equiv 0(\text{mod } 3)$, för restklass 1 gäller $n=3k+1$ och $n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1\equiv 1(\text{mod } 3)$ och för restklass 2: $n=3k+2$ dvs $n^2=9k^2+12k+4\equiv 1(\text{mod } 3)$ VSV

2317. $(2n)^2(\text{mod } 4)\equiv 4n^2(\text{mod } 4)\equiv 0(\text{mod } 4)$

2318. $(3n+1)^3(\text{mod } 9)\equiv(27n^3+3\cdot 9n^2+3\cdot 3n+1)(\text{mod } 9)\equiv 1(\text{mod } 9)$

2319. $621=6\cdot 100+2\cdot 10+1=6(99+1)+2(9+1)+1=6\cdot 99+2\cdot 9+6+2+1$
dvs om $6+2+1=9$ är delbart med 3 är talet 621 delbart med 3 VSV.

2320. $(9^n - 1)(\text{mod } 8) \equiv (1^n - 1)(\text{mod } 8) \equiv 0(\text{mod } 8)$

2321. $1000(\text{mod}7) \equiv 6(\text{mod}7)$ dvs måndag.

2322. $25^{100}(\text{mod}24) \equiv 1^{100}(\text{mod}24)$ dvs klockan 13.

2323. $292 \cdot 429 + 533 \cdot 225 = (288 + 4)(420 + 9) + (528 + 5)(222 + 3) =$

$$= (4 \cdot 3)(\text{mod } 6) + (5 \cdot 3)(\text{mod } 6) \equiv 3(\text{mod } 6)$$

2324. $201672(\text{mod}3) = (2 \cdot 100\,000 + 0 \cdot 10\,000 + 1 \cdot 1\,000 + 6 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 2)(\text{mod}3) =$

$$= (2 \cdot (99\,9999 + 1) + 1 \cdot (999 + 1) + 6 \cdot (99 + 1) + 7 \cdot (9 + 1) + 2)(\text{mod}3) =$$

$$= (2 + 1 + 6 + 7 + 2)(\text{mod}3) \equiv 0(\text{mod}3)$$

2325. $a = n \cdot 7 + b$ och $c = m \cdot 7 + d \Rightarrow a + c = n \cdot 7 + b + m \cdot 7 + d \equiv (b + d)(\text{mod } 7)$

2413. $7, 10, 13, \cdots, 121, 124 \Rightarrow \text{rad}(i) = 7 + (i - 1)3 = 124 \Rightarrow i = 40$ rader $\Rightarrow$

$$\text{totalt antal stolar} = \frac{1}{2}40 \cdot (7 + 124) = 2\,620 \text{ stolar}$$

2414. $n = 1$ ger de två första udda talen $1 + 3 = 2^2$, OK, gäller då $n = 1$.

$$\sum_{i=0}^{n+1} 1 + 2i = \sum_{i=0}^{n} (1 + 2i) + 1 + 2(n + 1) = (n + 1)^2 + 1 + \ 2(n + 1) =$$

$$= n^2 + 2n + 1 + 1 + \ 2n + 2 = n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2 \text{ VSB}$$

2415.

$$\begin{cases} a - k + a + a + k = 3 \\ \dfrac{(a-k)^2}{a^2} = \dfrac{a^2}{(a+k)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ (a-k)^2(a+k)^2 = a^4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ (a-k)(a+k) = -a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a^2 - k^2 = -a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ k = \sqrt{2} \end{cases}$$

2416.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(0) = b, f'(1) = 2a + b, \cdots, f'(9) = 18a + b$$

$$\sum_{i=0}^{9} 2ax + b = \frac{1}{2}(b + 18a + b)10 = 90a + 10b$$

2426.

$$45\,000 = a\frac{1-1.07^6}{1-1.07} \Rightarrow a = 45\,000 \cdot \frac{0.07}{1.07^6-1} \approx 6\,300 \text{ kr}$$

Verkar vara fel i facit.

$$a + a1.07 + a1.07^2 + a1.07^3 + a1.07^4 + a1.07^5 + a1.07^6$$

2427.

$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \quad \cdots 3^n \quad 3^9 = 19683 \quad 3^{10} = 59049$$

a) 2

b) 0

c) 3

2428.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots = \left\{a\frac{1}{1-k} \text{ då } k<1\right\} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

2429.

$$S_n = 100 \cdot \frac{1.05^{n+1}-1}{1.05-1} = 5000 \Rightarrow 1.05^{n+1}-1 = 50 \cdot 0.05 \Rightarrow n \approx 25 \text{ år}$$

2430.

$$S_5 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

$$xS_5 = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

$$xS_5 - S_5 = S_5(x-1) = x^6 - 1 \Rightarrow S_5 = \frac{x^6-1}{x-1}$$

2431.

$$a^2 + h^2 + b^2 + h^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow h^2 = ab \text{ dvs} \frac{a}{h} = \frac{h}{b}$$

Om talföljden är a, h, b och kvoten mellan två följande tal i serien konstant är det en geometrisk serie.

2432. a) Då element $1 = 2$ och element $9 = 512 = a \cdot k^8$ fås: $a = 2$ och $k = 2$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$a \cdot k$	$a \cdot k^2$	$a \cdot k^3$	$a \cdot k^4$	$a \cdot k^5$	$a \cdot k^6$	$a \cdot k^7$	$a \cdot k^8$
2	4	8	16	32	64	128	256	512

Ny talföljd:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}

Den nya talföljdens kvot $= \frac{1}{2}$

b) Ja, den nya talföljden börjar på a^{-1} och dess kvot blir k^{-1}.

2433. Låt serien vara $a,\ a\cdot k, a\cdot k^2, a\cdot k^3,\ a\cdot k^4$. Tag nu logaritmen av termerna:

$$\log a\,, \log(a\cdot k)\,, \log(a\cdot k^2)\,, \log(a\cdot k^3)\,, \log(a\cdot k^4) \Rightarrow$$

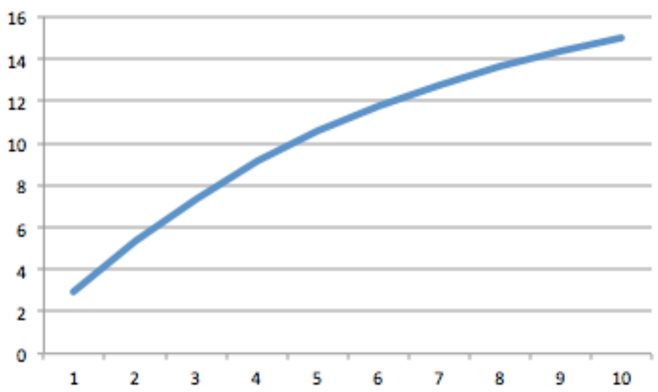
$$\log a\,, \log a + \log k\,, \log a + 2\log k\,, \log a + 3\log k\,, \log a + 4\log k$$

Detta är en aritmetisk serie VSV.

2434. Då 10 doser givits har 9 timmar förflutit, dvs:

$$a + a\cdot k + a\cdot k^2 + \cdots + a\cdot k^9 = a\cdot\frac{k^{10}-1}{k-1} = 15 \text{ mg då } k = 0.84 \Rightarrow a = 2.9 \text{ mg}$$

Resonemanget leder till att patienten aldrig har mer än 15 mg i kroppen, därför är den första meningen i uppgiften något vilseledande.



2508. a)

$$\ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{i}\right) = \ln\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{i}\right) = \ln\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{i+1}{i}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[\ln(i+1) - \ln i] =$$

$$= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln n + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1)$$

b) Prova några summor:

1	2	3	4	n (kanske?)
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}$	$\frac{n}{n+1}$

Testa vad summan blir med $n+1$ termer:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}\text{ VSB}$$

2510. Testa med $n=0, \Rightarrow (1+x)^0 \geq 1$, stämmer. Ta nu $n+1$.

$$(1+x)^{n+1}=(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)=1+x+nx+nx^2=1+(n+1)x+nx^2$$

dvs

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x \text{ VSB}$$

Enligt induktionsaxiomet gäller då uttrycket för alla $n \in N$ och $x>0$.

2511. Testa med $n=1$, $1^3+2=3$, OK delbart med 3. Prova nu $n+1$

$$(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+2n+2=(n^3+2n)+3n^2+3n+3=$$

$$=(n^3+2n)+3(n^2+n+1)$$

Delbart med 3, enligt induktionsaxiomet är då uttrycket alltid delbart med 3 VSB.

Test 2

1. $3|123, 1732$ är jämnt, 2671 är primtal, $3|3975$

2. Både 28 och 6032 är delbara med 4, dvs summan är delbar med 4.

3.Kvot= 6 rest = 1.

7. $2+4+6+\cdots+198+200=(2+200)+(4+198)+\cdots+(100+102)=50\cdot 202=10100$

8. $a_2=3=ck^2, a_4=0.75ck^4 \Rightarrow \frac{3}{0.75}=\frac{ck^2}{ck^4} \Rightarrow k^2=\frac{0.75}{3}=0.25 \Rightarrow k=0.5, c=12 \Rightarrow a_1=6$

$$a_i = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i, \text{Bokens svar är märkligt.}$$

9.

$$z_1 = z_0^2 + (1+i) = 1 + i$$

$$z_2 = z_1^2 + (1+i) = (1+i)^2 + 1 + i = 1 + 2i - 1 + 1 + i = 1 + 3i$$

$$z_3 = z_2^2 + (1+i) = (1+3i)^2 + 1 + i = 1 + 6i - 9 + 1 + i = -7 + 7i$$

10.

$$a_1 = 2a_0 + 1 = 3 = 2^{1+1} - 1 = 3 \text{ OK}$$

$$a_{n+1} = 2^{n+2} - 1 = 2 \cdot 2^{n+1} - 2 + 2 - 1 = 2(2^{n+1} - 1) + 1 = 2a_n + 1 \text{ VSV}$$

11. Tryck på räknaren.

$$22\,320 = 9 \cdot 80 \cdot 31 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 31$$

12. De 4 första primtalen är 2, 3, 5 och 7:

$$2^2 - 1 = 5, 2^3 - 1 = 7, 2^5 - 1 = 31, 2^7 - 1 = 127 \text{ VSV}$$

13.

$$\frac{23450}{48} = 488 + \frac{26}{48}, 26 \text{ eller } 74 \text{ t. ex.}$$

14.

$2522 = 2047 \cdot 1 + 475$
$2047 = 475 \cdot 4 + 147$
$475 = 147 \cdot 3 + 34$
$147 = 34 \cdot 4 + 11$
$34 = 11 \cdot 3 + 1$

15. $6754 \equiv 3718 (\text{mod } 33) \Rightarrow 6754 (\text{mod } 33) = 22 \text{ och } 3718 (\text{mod } 33) = 22 \Rightarrow \text{JA}$

16.

$$80\,000 \cdot 0.08 + 8\,000 + 72\,000 \cdot 0.08 + 8\,000 + \cdots 8\,000 \cdot 0.08 + 8000 =$$

$$= 0.08 \sum_{n=0}^{9} (80\,000 - n \cdot 8\,000) + 80\,000 =$$

$$= 0.08 \cdot \frac{10}{2}(80\,000 + 8000) + 80\,000 = 35\,200 + 80\,000$$

17.

a) $\frac{11\,000}{10\,000} = 1.1, \frac{12\,100}{11\,000} = 1.1 \Rightarrow \text{geometrisk serie}$

b) Nej

c) $\frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ geometrisk serie

d) Aritmetisk talföljd med $d = 11$

18. Antalet insättningar blir 28. Den första insättningen har genererat $1000 \cdot 1.03^{28}$ kr, den andra $1000 \cdot 1.03^{27}$ kr dvs totalt:

$$\sum_{i=1}^{28} 1000 \cdot 1.03^{28} = 1000 \cdot \frac{1.03^{29} - 1}{1.03 - 1} \approx 45\,200 \text{ kr}$$

19. $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \Rightarrow$ och $a_0 = 1$ ger med hjälp av excel:

n	rot(1+a_n)
0	1,000000
1	1,414214
2	1,553774
3	1,598053
4	1,611848
5	1,616121
6	1,617443
7	1,617851
8	1,617978
9	1,618017
10	1,618029
11	1,618032
12	1,618033
13	1,618034
14	1,618034

20. Visa först att uttrycket gäller då $n = 1$ dvs:

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2} \text{ OK}$$

Låt sedan summan gå till $n + 1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2(n+2)}{2 \cdot 2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} =$$

$$= 2 - \frac{2(n+2) - n - 1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}} \text{ VSV}$$

Enligt induktionsaxiomet gäller uttrycket för alla positiva heltal n.

Blandade uppgifter 2

1.

101	103	107	109	113
127	131	137	139	149
151	157	163	167	173
179	181	191	193	197
199				

2. Bara 1287. För att $1+2+8+7=18$ är delbart med 3.

28. Visa att $2^{n-1} \leq n!$. Testa med t.ex. $n=1$, $2^0 \leq 0! = 1$ OK.
Kolla $n+1$ dvs $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \leq 2 \cdot n! \leq (n+1)!$ VSB
Enligt induktionsaxiomet gäller då uttrycket för alla *n*.

29. a)
$13^3 - 13 = (12+1)^3 - 13 = 12^3 + 3 \cdot 12^2 + 3 \cdot 12 + 1 - 13 = 12^3 + 3 \cdot 12^2 + 3 \cdot 12 - 12$ VSB

b)
$$5876332^3(\mathrm{mod}6) - 5876332(\mathrm{mod}6) = 4^3(\mathrm{mod}6) - 4(\mathrm{mod}6) = 4(\mathrm{mod}6) - 4(\mathrm{mod}6) = 0$$

c) $n^3 - n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1) \Rightarrow$ för alla n

30.
$$\begin{cases} a = 4+k \\ am = 4+2k \\ am^2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4+k \\ am = 4+2k \\ a^2m^2 = 18a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4+k \\ a^2m^2 = (4+2k)^2 \Rightarrow 18(4+k) = (4+2k)^2 \\ a^2m^2 = 18a \end{cases}$$

$$\Rightarrow 72 + 18k = 16 + 16k + 4k^2 \Rightarrow 0 = -56 - 2k + 4k^2 \Rightarrow k^2 - \frac{1}{2}k - 14 = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 14} = \frac{1}{4} \pm \frac{15}{4} = \begin{cases} k_1 = 4 \\ k_2 = -3.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 8 \\ a_2 = 0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 1.5 \\ m_2 = -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ y_1 = 12 \end{cases} \text{eller} \begin{cases} x_1 = 0.5 \\ y_1 = -3 \end{cases}$$

31. $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_7 = \{a + (i-1)k\} = a, a+k, a+2k, \cdots, a+6k$

$$\begin{cases} a + a + 6k = 40 \\ a \cdot (a+3k) = 160 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 3k = 20 \\ a \cdot (a+3k) = 160 \end{cases} \Rightarrow a \cdot 20 = 160 \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ k = 4 \end{cases}$$

Talföljden blir: $8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36$

32. Gäller för $n = 1$,

$$n+1 \Rightarrow 1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{3(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} \text{ VSB}$$

33. Gäller för $n = 1$,

$$n+1 \Rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2\big(n^2 + 4(n+1)\big)}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \text{ VSB}$$

34.

$$Dx^n = \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \text{gäller då } n = 1$$

$$n+1 \Rightarrow \frac{d}{dx}x^{n+1} = \frac{d}{dx}(x \cdot x^n) = \{\text{derivatan av en produkt}\} = x \cdot \frac{d}{dx}x^n + x^n \frac{d}{dx}x =$$

$$= x \cdot nx^{n-1} + x^n = nx^n + x^n = (n+1)x^n \text{ VSB}$$

35.

36. a) Uttrycket gäller för $n = 1$.

$$a^{n+1} - b^{n+1} = a \cdot a^n - b \cdot b^n = a \cdot a^n - a \cdot b^n + a \cdot b^n - b \cdot b^n = a \cdot (a^n - b^n) + (a-b) \cdot b^n$$

b) Gäller för $n = 1$,

$$a^{2(n+1)} - b^{2(n+1)} = a^2 a^{2n} - b^2 b^{2n} = a^2 a^{2n} \underbrace{- a^2 \cdot b^{2n} + a^2 \cdot b^{2n}}_{=0} - b^2 b^{2n} = a^2\left(a^{2n} - b^{2n}\right) + \left(a^2 - b^2\right) b^{2n}$$