Valda uppgifter i kursboken Matematik M3c av Sjunnesson med flera utgiven på Liber, (2012).

4114. $f'(x) = 12e^{2x} \Rightarrow f(x) = 6e^{2x} + C,$ men $f(0) = 30 \Rightarrow f(x) = 6e^{2x} + 24$

4115. $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$, punkten på kurvan är (a, e^a) och lutningen e^a dvs tangenten beskrivs enlig enpunktsformeln av $y - e^a = e^a(x - a)$. y-axeln skärs när $y = 0$ dvs $-e^a = e^a(x - a)$ eller $x = a - 1$ VSV.

4116. $f(a) = e^a$

A: $f(2a) = e^{2a} = (e^a)^2 \neq 2e^a = 2f(a)$

B: $f(2a) = e^{2a} = (e^a)^2 = \left(f(a)\right)^2$

C: $f(2a) = e^{2a} = (e^a)^2 \neq e^{2+a} = e^2 e^a = f(2)f(a)$

D: $f(2 + a) = e^{2+a} = e^2 e^a = f(2)f(a)$

E: $f(-a) = e^{-a} = \frac{1}{f(a)} \neq -f(a)$

F: $f(-a) = e^{-a} = \frac{1}{f(a)} = \left(f(a)\right)^{-1}$

4119. a)

$$\ln\frac{x}{2} = 3 \Rightarrow \frac{x}{2} = e^3 \Rightarrow x = 2e^3 \approx 40.2$$

b)

$$3e^x = 30 \Rightarrow e^x = 10 \Rightarrow x = \ln 10 \approx 2.30$$

4123. a) $4^x = 12 \Rightarrow \ln 4^x = \ln 12 \Rightarrow x = \frac{\ln 12}{\ln 4} \approx 1.79$

b) $2^{3x} = 850 \Rightarrow \ln 2^{3x} = \ln 850 \Rightarrow 3x \ln 2 = \ln 850 \Rightarrow x = \frac{\ln 850}{3 \ln 2} \approx 3.24$

c) $1.5^{-x} = 0.01 \Rightarrow -x \ln 1.5 = \ln 0.01 \Rightarrow x = -\frac{\ln 0.01}{\ln 1.5} \approx 11.3$

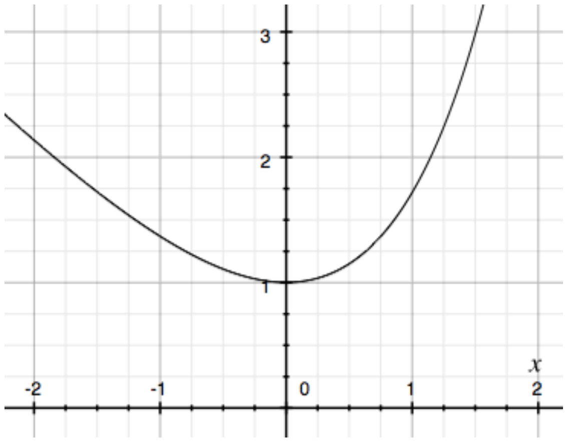
4124.

$$g(x) = 15 \cdot e^{-0.5x} \Rightarrow g'(x) = -7.5 \cdot e^{-0.5x}, g'(x) = -3 \text{ då}$$

$$-7.5 \cdot e^{-0.5x} = -3 \Rightarrow e^{-0.5x} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = -2\ln\frac{2}{5} \approx 1.83$$

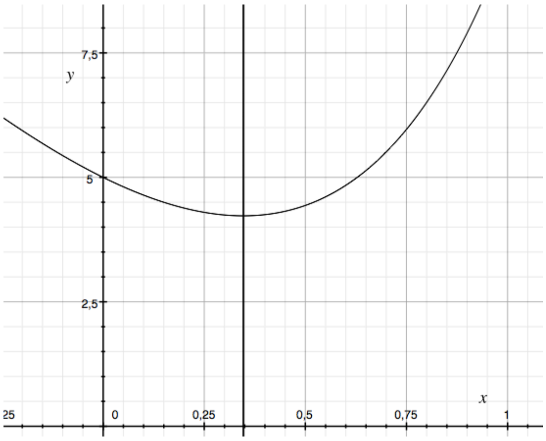
4125.

$$y = e^x - x \Rightarrow y' = e^x - 1 = 0 \text{ då } x = 0$$



4126.

$$f(x) = 2e^{2x} - 8x + 3 \Rightarrow f'(x) = 4e^{2x} - 8 = 0 \; då \; x = \ln\sqrt{2}$$



4127. ln 3 borde vara lite större än 1 eftersom $3 > e$. lg 3 borde inte vara långt från 0.5 eftersom $\sqrt{10} \approx 3.1$.

4128. Det beror på om *k* är större än eller mindre än 1. Om $k > 1$ så är derivatan den röda. Annars tvärtom.

4129. $f(x) = x^2 + e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2x + 2e^{2x} = 0$ då $e^{2x} = -x \Rightarrow x \approx -0.426$

4130. Skillnaden är $d = e^x - 2x$ derivatan är $e^x - 2 = 0 \Rightarrow x = \ln 2 \Rightarrow d = 2 - 2\ln 2$

4131. a) $y(t) = 130 \cdot 1.2^x = 130 \cdot e^{xln1.2}$

b) $y(10) = 130 \cdot e^{10ln1.2} \approx 805°C$

c) $y'(t) = 130 \cdot \ln 1.2 \, e^{xln1.2}$

d) $y'(10) = 130 \cdot \ln 1.2 \, e^{10ln1.2} \approx 147$ °/min

4132. En inflexionspunkt är där andraderivatan byter tecken. y-axeln skärs då $x = 0$.

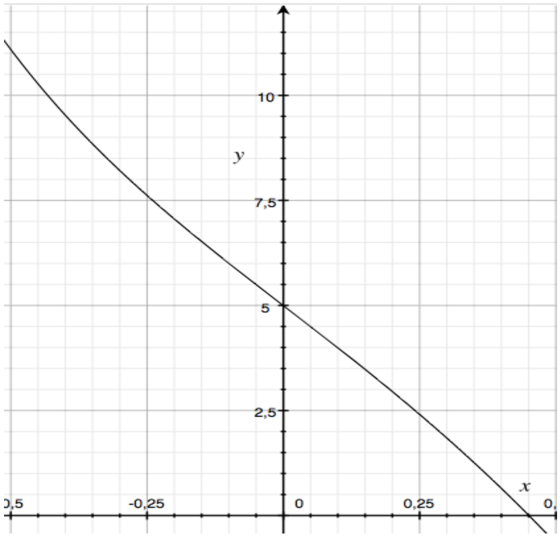
$$f(x) = 5e^{-2x} + a^2 - 10x^2 \Rightarrow f'(x) = -10e^{-2x} - 20x \Rightarrow f''(x) = 20e^{-2x} - 20 =$$

$$= 20(e^{-2x} - 1)$$

Ett teckenschema visar:

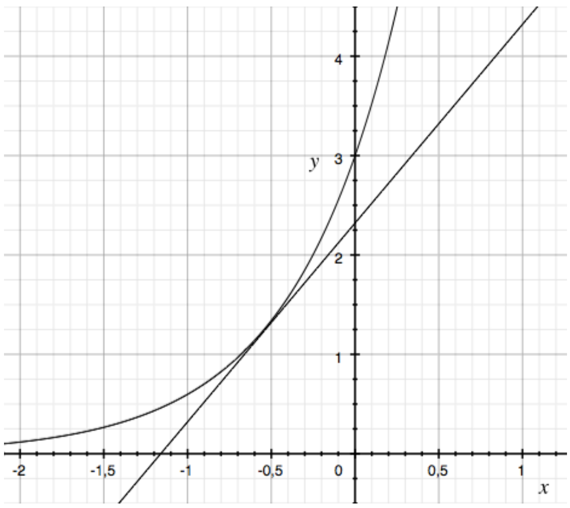
x	-0.1	0	0.1
$f''(x)$	$+$	0	$-$

Dvs en inflexionspunkt.



4139. $y(x) = 3 \cdot 5^x \Rightarrow y'(x) = 3 \ln 5 \cdot 5^x, y'(x) = 2$ då $3 \ln 5 \cdot 5^x = 2$

$$5^x = \frac{2}{3 \ln 5} \Rightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{2}{3 \ln 5}\right)}{\ln 5} \approx -0.548, y \approx 1.24$$



4140. $y(x) = 15\,000 \cdot 1.06^x = 15\,000 \cdot e^{x \ln 1.06} \Rightarrow y'(x) = 15\,000 \cdot \ln 1.06 \cdot e^{x \ln 1.06}$

$$15\,000 \cdot \ln 1.06 \cdot e^{x \ln 1.06} = 1200 \Rightarrow x \cdot \ln 1.06 = \ln \frac{1200}{15\,000 \cdot \ln 1.06} \Rightarrow x \approx 5.4$$

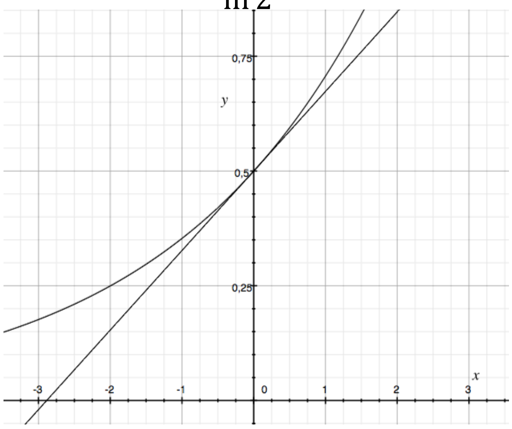
Vid tiden 5.4 år är tillväxten 1200 kr/år

4141. $g(x) = C \cdot 2^{0.5x}$ men $g(4) = C \cdot 2^{0.5 \cdot 4} = 2 \Rightarrow C = 0.5$ dvs $g(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{x 0.5 \ln 2} \Rightarrow$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot 0.5 \ln 2\, e^{x 0.5 \ln 2} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{2} \cdot 0.5 \ln 2\, e^{0 \cdot 0.5 \ln 2} = \frac{1}{4} \ln 2$$

Tangenten får ekvationen $y - 0.5 = \frac{1}{4} \ln 2\,(x - 0)$ vilken skär x-axeln då $y = 0$ dvs då

$$x = -\frac{2}{\ln 2} \approx -2.9$$



4152. $h(t) = b \cdot a^t, h(0) = 17.0 \Rightarrow b = 17$ och $h(300) = 6.3$, detta ger:

$$6.3 = 17 \cdot a^{300} \Rightarrow a = \left(\frac{6.3}{17}\right)^{\frac{1}{300}} \approx 0.997 \text{ dvs } h(t) = 17 \cdot 0.997^t \text{ och}$$

$$h'(t) = 17 \cdot \ln(0.997)\, 0.997^t \Rightarrow h'(300) \approx -0.021 \text{ cm/s}$$

4153. a)

$$T(t) = t_0 e^{-kt}, T'(t) = -kt_0 e^{-kt} \Rightarrow \begin{cases} 76 = t_0 e^{-k4} \\ -4.1 = -kt_0 e^{-k4} \end{cases} \Rightarrow 76k = 4.1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = \frac{4.1}{76} \approx 0.054 \\ t_0 = 76 e^{4 \cdot \frac{4.1}{76}} \approx 94° \end{cases} \Rightarrow T(t) = 94 e^{-0.054t}$$

b)

$$94 e^{-0.054t} = 55 \Rightarrow t \approx 10 \text{ h}$$

4154.

$$h_1 = 13.4 \ln d - 21.4, h_2 = 13.4 \ln 2d - 21.4 \Rightarrow$$

$$h_2 - h_1 = 13.4 \ln 2d - 21.4 - (13.4 \ln d - 21.4) =$$

$$= 13.4(\ln d + \ln 2) - 13.4 \ln d = 13.4 \ln 2 \approx 9.3 \text{ m}$$

4155.

$$M(x) = M_0 \cdot e^{-\lambda x}, M(T) = \frac{M_0}{2} \text{ då } e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda T = \ln 2 \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

4156.

$$y(x) = 200 - 180 \cdot e^{-kx}$$

a) $y(0) = 200 - 180 = 20°$

b)

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} (200 - 180 \cdot e^{-kx}) = 200°$$

c) $y'(x) = -180(-k) \cdot e^{-kx} \Rightarrow y'(0) = 180k = 2.4 \Rightarrow k \approx 0.013 \Rightarrow$

$$y(18) = 200 - 180 \cdot e^{-0.013 \cdot 18} \approx 58°$$

d)

$$y(t) = 200 - 180 \cdot e^{-0.013 \cdot t} = 65 \Rightarrow t \approx 22 \text{ min}$$

4157.

$$y = Ce^{-2x} \Rightarrow y' = -2Ce^{-2x} \Rightarrow y'' = 4Ce^{-2x}$$

Sätt in dessa i uttrycket:

$$\text{VL} = y'' + y' - 2y = 4Ce^{-2x} + (-2Ce^{-2x}) - 2(Ce^{-2x}) = 0 = \text{HL VSV}$$

4216.

$$f(x) = \frac{3}{x^4} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{x^3} + C \text{ men då } F(1) = 3 \Rightarrow C = 4$$

$$F(2) = -\frac{1}{2^3} + 4 = 4 - \frac{1}{8} = \frac{31}{8}$$

4217.

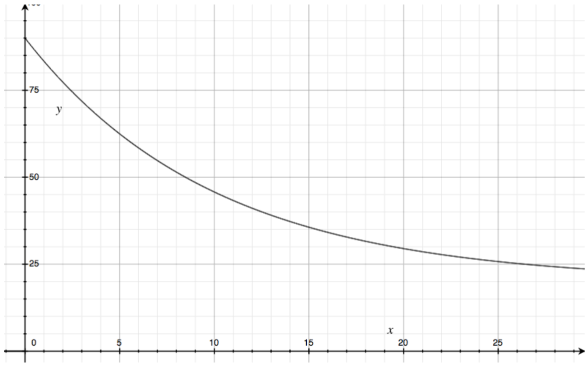
$$f(x) = 435 \Rightarrow F(x) = 435x + C$$

C betyder hur mycket vatten som runnit från början och $435x$ är volymen som passerar under tiden x s.

4218. Då temperaturen börjar på 90 °C och slutar på 20 °C blir temperaturnedgången 70 °C.

$$T'(t) = -7e^{-0.1t} \text{ °C/min} \Rightarrow T(t) = 20 + 70e^{-0.1t} \text{ °C}$$

$$T(18) = 20 + 70e^{-0.1 \cdot 18} \approx 32 \text{ °}C$$



4219. Om funktionen är den svarta parabeln $f(x) = (x - a)(x - b)$ blir dess derivata en rät linje med $k > 0$ (den blå) och den primitiva funktionen $F(x)$ en tredjegradsfunktion (den röda).

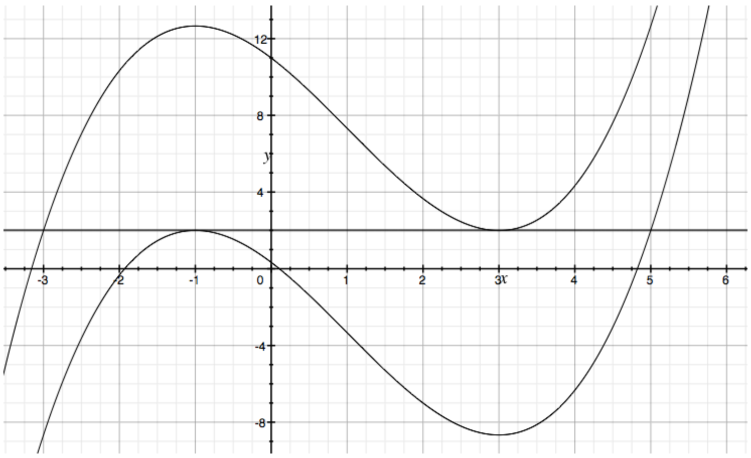
4220. $f(x) = x^2 - 2x - 3$ är lutningen hos den primitiva funktionen $F(x)$. Vi söker alltså de ställen där $f(x) = 0$.

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm 2 = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

I dessa punkter är alltså $F(x) = 2$, men $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + C$ och man får:

$$F_1(3) = \frac{3^3}{3} - 3^2 - 3 \cdot 3 + C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = 11$$

$$F_2(-1) = \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{3}$$



4236.

$$\int_1^5 f(x)dx = F(5) - F(1) = 4 - 1 = 3$$

4237.

$$f(x) = \int_1^x \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} + 2t\right) dt = \left[\sqrt{t} + t^2\right]_1^x = \sqrt{x} + x^2 - 1 - 1 = \sqrt{x} + 7 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2 = 7 \Rightarrow x = 3 \text{ ty } x > 1$$

4238.

$$\int_1^5 (f(x) + 5)dx = \int_1^5 f(x)dx + \int_1^5 5dx = 6 + 5[x]_1^5 = 6 + 5(5 - 1) = 26$$

4239. a)

$$\int_0^a 5e^{-0.7x}dx = \frac{5}{0.7}[e^{-0.7x}]_a^0 = \frac{5}{0.7}(1 - a^{-0.7a}) = 5 \Rightarrow$$

$$1 - a^{-0.7a} = 0.7 \Rightarrow a = -\frac{\ln 0.3}{0.7} \approx 1.72$$

b)

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a 5e^{-0.7x}dx = \lim_{a\to\infty} \frac{5}{0.7}[e^{-0.7x}]_a^0 = \frac{5}{0.7} \approx 7.1 \text{ a.e.}$$

Det område som begränsas av kurvan och axeln om man låter $a \to \infty$.

4240. a) Det är Graf b som är primitiv funktion till Graf a. Graf b är stigande utom i värdet $x = 3$, Graf a har bara icke negativa värden, som derivatan till Graf b.

b)

$$\int_0^3 f(x)dx = F(3) - F(1) = 2 - (-1) = 3$$

4312.

$$A = \int_0^1 (8x - 2.5x)dx + \int_1^2 (9 - x^2 - 2.5x)dx =$$

$$= 5.5\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[9x - \frac{x^3}{3} - 2.5\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{5.5}{2} + 18 - \frac{8}{3} - 5 - \left(9 - \frac{1}{3} - \frac{2.5}{2}\right) =$$

$$= \frac{5.5}{2} + 18 - \frac{8}{3} - 5 - 9 + \frac{1}{3} + \frac{2.5}{2} = 5\ \frac{2}{3} \text{ a.e.}$$

4313.

$$\int_1^2 \frac{a}{x^2}dx = a\left[\frac{1}{x}\right]_2^1 = a\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{a}{2} = 9 \Rightarrow a = 18$$

4314.

$$I(k) = \int_0^k (k - x^3)dx = \left[kx - \frac{x^4}{4}\right]_0^k = k^2 - \frac{k^4}{4}$$

Derivera uttryckt med avseende på *k*:

$$I'(k) = 2k - k^3, I''(k) = 2 - 3k^2$$

$$I'(k) = 0 \text{ då } k(2 - k^2) = 0, k = \sqrt{2} \Rightarrow I''(\sqrt{2}) < 0 \text{ dvs maximum}$$

$$I(\sqrt{2}) = 2 - 1 = 1$$

4315. Anta att rektangeln sträcker sig från $-a$ till a. Då blir förhållandet:

$$\frac{\int_{-a}^0 x^2 dx + \int_0^a x^2 dx}{2a \cdot a^2} = \frac{\int_0^a x^2 dx}{a^3} = \frac{\frac{a^3}{3}}{a^3} = \frac{1}{3} \text{ VSV}$$

4316. $f(0) = 4, f'(x) = 3 - 6e^{-2x} \Rightarrow f(x) = 3x + 3e^{-2x} + C = 3x + 3e^{-2x} + 1$

$$\int_{-1}^4 \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_{-1}^4 (1 - C_1)dx = (1 - C_1)[x]_{-1}^4 = 5(1 - C_1) = 10 \Rightarrow$$

$$g(x) = 3x + 3e^{-2x} - 1$$

4327. a)

$$g(2) = \int_0^2 f(x)dx = 2 \cdot 5 = 10$$

b) $g(x)$ har sitt största värde då $x = 3$: $g(x) = 12.5$

c) När arean under axeln är lika stor som ytan ovan axeln är $g(x) = 0$, dvs då $x = 6$. Och dessutom då $x = 0$.

d) När $6 < x \leq 9$ är $g(x) < 0$.

4328.

$$\int_a^b (2 + e^{0.3x})dx - \int_a^b e^{0.3x} dx = \int_a^b 2dx = 2(b - a)$$

4329. a)

$$\int_{-2}^0 f(x)dx = A \text{ \{fast med negativt tecken\}} = -\frac{16}{3}$$

b)

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx = -\frac{16}{3} + B = \frac{125}{12} \Rightarrow B = \frac{189}{12} = 15.75 \text{ a. e.}$$

4330.

$$\int_{0}^{1} (kx + m)dx = \left[k\frac{x^2}{2} + xm\right]_0^1 = \frac{k}{2} + m = 0 \Rightarrow k = -2m$$

4331.

$$\int_{2}^{6} (f(x) + k)dx = \int_{2}^{6} f(x)dx + \int_{2}^{6} kdx = 14 + k(6-2) = 18 \Rightarrow k = 1$$

4332. $g'(0) = 2$ välj $g(x) = 2x + C$ detta ger:

$$\int_{1}^{4} (2x + C)dx = [x^2 + Cx]_1^4 = 16 + 4C - 1 - C = 3 \Rightarrow C = -4 \Rightarrow g(x) = 2x - 4$$

Test 4

1. a)

$$f'(x) = 3e^x + 12e^{-3x}$$

b)

$$f(x) = 100 \cdot 1.03^x = 100 \cdot e^{x \ln 1.03} \Rightarrow f'(x) = 100 \cdot \ln 1.03 \cdot 1.03^x$$

2. a)

$$\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$$

b)

$$3e^x = 12 \Rightarrow e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4$$

3. a)

$$f(x) = 6x^2 - 4x^3 \Rightarrow F(x) = 2x^3 - x^4 + C$$

b)

$$f(x) = 2e^{x/3} \Rightarrow F(x) = 6e^{x/3} + C$$

4. a)

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} \Rightarrow F(x) = 6\sqrt{x}$$

b)

$$g(x) = \frac{5}{x^2} \Rightarrow F(x) = -\frac{5}{x}$$

5. a)

$$f(x) = 3e^x - e^{-x/2} \Rightarrow F(x) = 3e^x + 2e^{-x/2} + C, F(0) = 3 + 2 + C = 1 \Rightarrow$$

$$F(x) = 3e^x + 2e^{-x/2} - 4$$

b)

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 3 \Rightarrow F(x) = x^3 + x^2 - 3x + C, F(1) = 1 + 1 - 3 + C = 4 \Rightarrow$$

$$F(x) = x^3 + x^2 - 3x + 5$$

6.

$$v(t) = 5t \Rightarrow s(t) = 2.5t^2 + C, s(2) = 2.5 \cdot 2^2 + C = 6 \Rightarrow C = -4$$

$$s(t) = 2.5t^2 - 4 \text{ m}$$

7. a)

$$\int_0^3 4dx = 4[x]_0^3 = 4(3-0) = 12$$

b)

$$\int_2^6 (3t^2 - 2t + 1)dt = [t^3 - t^2 + t]_2^6 = 6^3 - 6^2 + 6 - (2^3 - 2^2 + 2) = 180$$

c)

$$\int_{-5}^0 2e^{-0.2x}dx = 10[e^{-0.2x}]_0^{-5} = 10(e-1)$$

10.

$$\int_1^3 (4x^7 - 2x^3 - 2x + 2)dx + \int_1^3 (-4x^7 + 2x^3 + 2x + 2)dx =$$

$$= \int_1^3 (4x^7 - 4x^7 - 2x^3 + 2x^3 - 2x + 2x + 2 + 2)dx =$$

$$= \int_1^3 4dx = 4[x]_1^3 = 4(3-1) = 8$$

11.

$$\int_0^{30} f(t)dt = 240 \text{ m}^3$$

Betyder att under 30 dagar förbrukades 240 m^3 vatten.

12.

$$g(t) = (e^t + 3)^2 = e^{2t} + 6e^t + 9 \Rightarrow G(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + 6e^t + 9t + C \Rightarrow$$

$$G(0) = \frac{1}{2}e^0 + 6e^0 + 9 \cdot 0 + C = 3.5 \Rightarrow C = -3$$

$$G(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + 6e^t + 9t - 3$$

13.

$$\int_1^a 2xdx = [x^2]_1^a = a^2 - 1 = 8 \Rightarrow a = 3$$

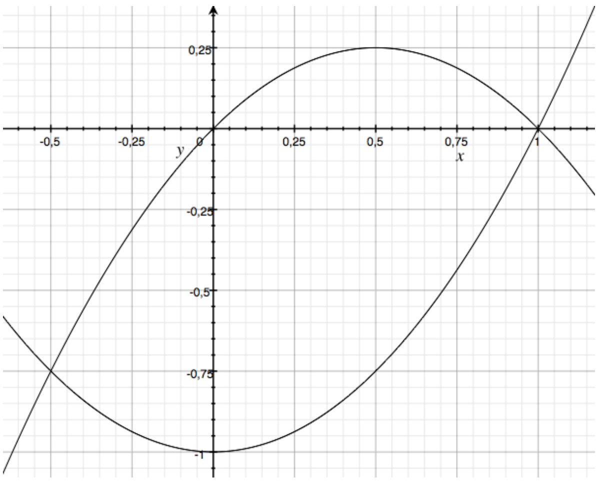
14.
a) ur grafen läses direkt att $F(2) = 5$

b) ur grafen fås direkt att $F(2) - F(0) = 5 - 1 = 4$

c)

$$\int_0^6 f(x)dx = [F(x)]_0^6 = F[6] - F[0] = 1 - 1 = 0$$

15.



$$\int_{-0.5}^{1} (x - x^2 - x^2 + 1)dx = \int_{-0.5}^{1} (x - 2x^2 + 1)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + x\right]_{-0.5}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}1^2 - \frac{2}{3}1^3 + 1 - \left(\frac{1}{2}(-0.5)^2 - \frac{2}{3}(-0.5)^3 - 0.5\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + 1 - \left(\frac{1}{2}0.25 + \frac{2}{3}0.125 - 0.5\right) =$$

$$= \frac{12}{24} - \frac{16}{24} + \frac{24}{24} - \frac{3}{24} - \frac{2}{24} + \frac{12}{24} = \frac{27}{24} = \frac{9}{8} = 1.125$$

16. a)

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int_0^3 f(x)dx = e^3 - 1, \int_3^5 f(x)dx = e^5 - e^3 \text{ och } \int_0^5 f(x)dx = e^5 - 1$$

b)

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx$$

17. a)

$$y = C \cdot a^x = 2000 \cdot 1.04^x$$

b)

$$y = C \cdot e^x = 2000 \cdot e^{x \ln 1.04}$$

c)

$$y'^{(5)} = 2000 \cdot \ln 1.04 \cdot e^{x \ln 1.04} \approx 95 \text{ kr/år}$$

Kapitaltillväxten efter 5 år är cirka 95 kr/år.

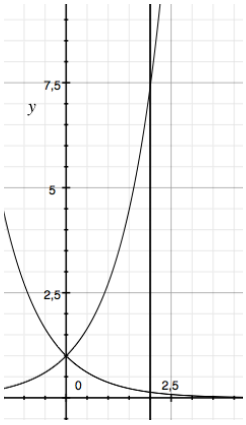
18. a)

$$\int_0^2 3x^2 dx = [x^3]_0^2 = 3^2 - 0^3 = 8 \text{ a. e.}$$

b)

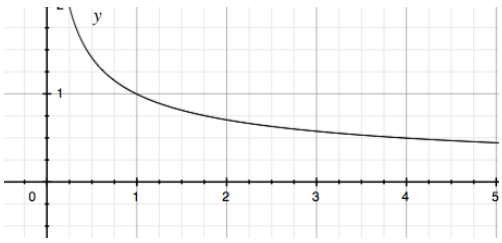
$$\int_0^1 0.5e^{2x} dx = [0.25e^{2x}]_0^1 = 0.25(e^2 - 1) \approx 1.6 \text{ a. e.}$$

19.



$$\int_0^2 (e^x - e^{-x}) dx = [e^x + e^{-x}]_0^2 = e^2 + e^{-2} - 2 \approx 5.5 \text{ a. e.}$$

20.



$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4 = 2 \cdot 2 - 2 = 2 \text{ a. e.}$$

21. a)

$$N'(t) = 0.36e^{0.04t} \Rightarrow N(t) = 9e^{0.04t} + 3$$

b)

$$N(15) = 9e^{0.04 \cdot 15} + 3 \approx 19 \text{ miljoner}$$

22. a)

$$N'(t) = 120t \Rightarrow N(t) = 60t^2 + 1500$$

b)

$$N(3) = 60 \cdot 3^2 + 1500 = 2\,040 \text{ st}$$

23.

$$v(t) = 20 \cdot e^{-0.2t} \Rightarrow \int_0^{10} 20 \cdot e^{-0.2t} dt = 100[e^{-0.2t}]_{10}^{0} = 100(1 - e^{-2}) \approx 86 \text{ liter}$$

24. Den svarta kurvan: $y(x) = 3e^{kx}, y(2) = 2 = 3e^{2k} \Rightarrow k = \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3} \Rightarrow y(x) = 3e^{x\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}}$

Den röda kurvan: $y(x) = e^{kx}, y(5) = 3 = e^{5x} \Rightarrow k = \frac{1}{5}\ln 3 \Rightarrow y(x) = e^{x\frac{1}{5}\ln 3}$

25. a)

$$y(x) = 1\,013 \cdot e^{-0.145x} \Rightarrow y(2) \approx 758 \text{ mbar}$$

b)

$$580 = 1013 \cdot e^{-0.145x} \Rightarrow x = 3.8 \text{ km}$$

c)

$$y'(x) = -0.145 \cdot 1\,013 \cdot e^{-0.145 \cdot 2} \text{ mbar/km}$$

d)

$$y'(2) = -0.145 \cdot 1\,013 \cdot e^{-0.145 \cdot 2} \approx -110 \text{ mbar/km}$$

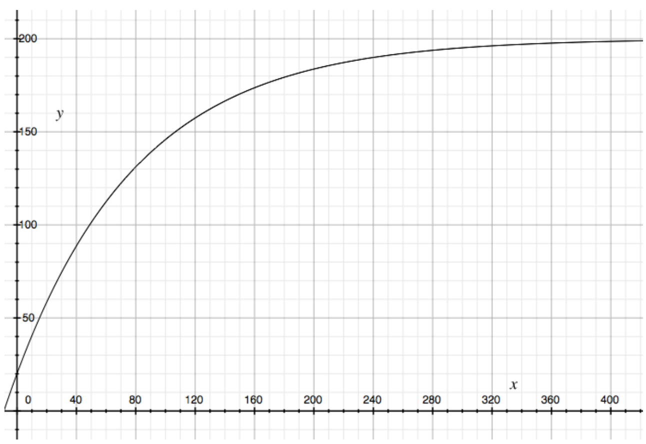
e)

$$y'(x) = -0.145 \cdot 1\,013 \cdot e^{-0.145 \cdot x} = -50 \text{ mbar/km} \Rightarrow x \approx 7.4 \text{ km höjd}$$

26.

$$y(t) = 200 - 180 \cdot e^{-kt}, y'(0) = 180k \cdot e^{-k0} = 2.08 \Rightarrow k = 0.012$$

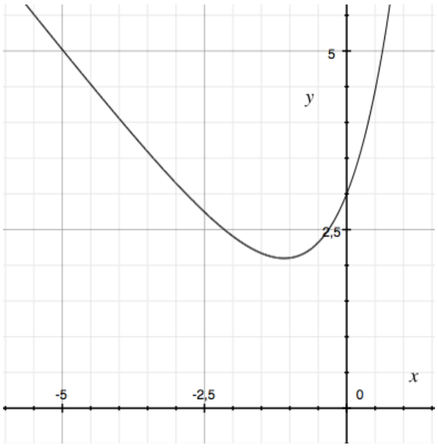
$$y(24) = 200 - 180 \cdot e^{-0.012 \cdot 24} \approx 64°\text{C}$$



27.

$$f(x) = 3e^x - x \Rightarrow f'(x) = 3e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = \ln\frac{1}{3}$$

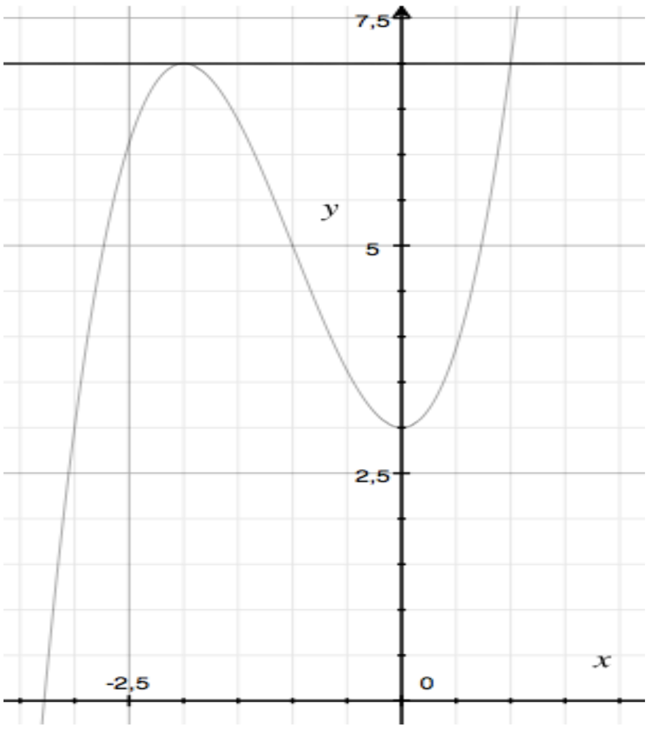
$$f\left(\ln\frac{1}{3}\right) \approx 2.1$$



28.

$$y(x) = x^3 + 3x^2 + 3 \Rightarrow y'(x) = 3x^2 + 6x = 0, x_1 = 0 \text{ och } x_2 = -2$$

$$\int_{-2}^{1} (7 - x^3 - 3x^2 - 3)dx = \left[4x - \frac{x^4}{4} - x^3\right]_{-2}^{1} = 3 - \frac{1}{4} - \left(-8 - \frac{16}{4} + 8\right) = 6\frac{3}{4} \text{ a. e.}$$



29. a)

$$B = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \text{ a. e.}$$

b)

$$A + \frac{4}{3} = \frac{16}{3} \Rightarrow A = 4 \text{ a. e.} \Rightarrow \int_{-3}^{2} f(x)dx = B - A = \frac{4}{3} - 4 = -\frac{8}{3}$$

Blandade Uppgifter 4

39.

$$A = \int_0^1 xdx + \int_1^3 \frac{1}{x^2}dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{x}\right]_3^1 = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{7}{6} \text{ a. e.}$$

40. Om $f'(x) = 0$ så är funktionen konstant dvs $f(x) = 3 \Rightarrow \int_2^6 3dx = 12$ a. e.

41.

$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} > \frac{1}{20} \Rightarrow 20 > 1 + n \text{ dvs för } n < 19.$$

47. a)

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx = \int_{-3}^{-2} f(x)dx + \int_{-2}^{2} f(x)dx = -\frac{7}{6} + \frac{16}{3} = \frac{25}{6} \text{ a. e.}$$

b)

$$\int_{-3}^{3} f(x) + e^x dx = \int_{-3}^{3} f(x)dx + \int_{-3}^{3} e^x dx = -\frac{7}{6} + \frac{16}{3} - \frac{7}{6} + [e^x]_{-3}^{3} =$$

$$= -\frac{7}{6} + \frac{32}{6} - \frac{7}{6} + (e^3 - e^{-3}) = 3 + e^3 - e^{-3}$$

48.

$$e^{2x} = p \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln p$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\ln p} p - e^{2x}dx = \left[px - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}\ln p} = \frac{p}{2}\ln p - \frac{p}{2} + \frac{1}{2} = 10 \Rightarrow$$

$$p\ln p - p = 19 \Rightarrow p \approx 12.5$$

49. Kurvan skär x-axeln då $1 - kx^2 = 0$ dvs då $x = \pm k^{-\frac{1}{2}}$, alltså:

$$\int_{-1/\sqrt{k}}^{1/\sqrt{k}} 1 - kx^2dx = \left[x - k\frac{x^3}{3}\right]_{-1/\sqrt{k}}^{1/\sqrt{k}} = \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{k}{3\left(\sqrt{k}\right)^3}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{k}{3\left(\sqrt{k}\right)^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{k}{3\left(\sqrt{k}\right)^3} + \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{k}{3\left(\sqrt{k}\right)^3} = \frac{2}{\sqrt{k}} - \frac{2}{3\sqrt{k}} = \frac{6}{3\sqrt{k}} - \frac{2}{3\sqrt{k}} = \frac{4}{3\sqrt{k}} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{k} = \frac{2}{3} \Rightarrow k = \frac{4}{9}$$

50.

$$2a\int_1^a \frac{2 + x^3}{x^2}dx = 2a\int_1^a \frac{2}{x^2} + xdx = 2a\left[-\frac{2}{x} + \frac{x^2}{2}\right]_1^a = 2a\left[-\frac{2}{a} + \frac{a^2}{2} + \frac{2}{1} - \frac{1}{2}\right] =$$

$$= -\frac{4a}{a} + \frac{2a \cdot a^2}{2} + 4a - a = a^3 + 3a - 4 \text{ VSV}$$

51. $\ln(3x^2) - \ln x = 1 \Rightarrow \ln 3 + 2\ln x - \ln x = 1 \Rightarrow \ln x = 1 - \ln 3 = \ln e - \ln 3 = \ln\frac{e}{3}$

$$x = \frac{e}{3}$$