

Valda uppgifter i kursboken Matematik M3c av Sjunnesson med flera utgiven på Liber, (2012).

Test 3.....1  
 Blandade uppgifter.....19

3114. Skriv om linjerna på formen  $y = kx + m$ , dvs  $3y = -2x + 9 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 3$  och  $y = \frac{p(p-2)}{2}x$ . För att linjerna skall vara vinkelräta krävs att  $k_1k_2 = -1$  dvs  $\frac{p(p-2)}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1 \Rightarrow$

$$p^2 - 2p - 3 = 0 \Rightarrow p = 1 \pm \sqrt{1^2 + 3} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

3115. Från punkten  $(-1, -5)$  till punkten  $(4, f(4))$  är det 5 steg längs x-axeln. Alltså:

$$f_{\min}(4) = -5 + 5 \cdot 2 = 5 \text{ och } f_{\max}(4) = -5 + 5 \cdot 3 = 10$$

3128. a)  $v(7) \approx \frac{38-21}{2} = 8.5 \text{ m/s}$

b)

Tid (s)	Sträcka (m)	$a = \frac{s}{t^2}$
6	21	0.58
8	38	0.59
10	60	0.6

$$\frac{s(7.1) - s(6.9)}{0.2} = \frac{a7.1^2 - a6.9^2}{0.2} \approx 8.3 \text{ m/s}$$

3129.  $f(x) = 4x - x^2 = x(4 - x)$  dvs vertex i  $x = 2$ .

a) Om  $a$  ligger längre bort än 1 i.e. till höger om vertex blir  $k < 0$ . Dvs då  $x > 3$ .

b)  $a = 3$

c)

$$-2 = \frac{f(a) - 3}{a - 1} = \frac{4a - a^2 - 3}{a - 1} \Rightarrow 2 - 2a = 4a - a^2 - 3 \Rightarrow$$

$$a^2 - 6a + 5 = 0 \Rightarrow a = 3 \pm \sqrt{3^2 - 5} = \begin{cases} 1 \text{ falsk} \\ 5 \end{cases}$$

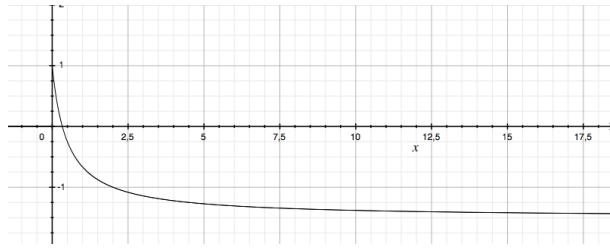
3141.  $f(2) = 5 \Rightarrow f_{\max}(10) = f(2) + 8 \cdot 2 = 21$

$$f_{\min}(10) = f(2) + 8 \cdot (-1) = -3 \text{ dvs } -3 \leq f(10) \leq 21$$

3142. a)  $f(2.1) \approx f(2) + 0.1f'(2) = 3 + 0.1 \cdot 4 = 3.4$

b)  $g(6.8) \approx f(7) - 0.2 \cdot f'(7) = -2 - 0.2(-3) = -1.4$

3154. a)



b)

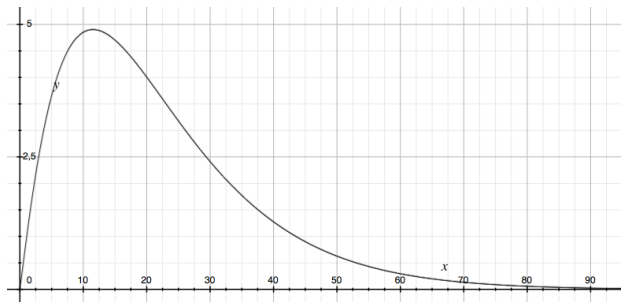
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x - 3x^2}{2x^2 + x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2} - 3}{2 + \frac{x}{x^2}} = -\frac{3}{2}$$

3155.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 2x}{4x + \sqrt{x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 2}{4 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = -\frac{1}{2}$$

3156. a)

$$y(x) = \frac{x^{1.1}}{1.1x}$$



b) Värdet ser ut att närma sig 0. Det finns en regel som säger att en exponentialfunktion växer snabbare än varje potens, till sist.

3207. a)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(x+h)^2 - 6x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6x^2 + 12xh + 6h^2 - 6x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12xh + 6h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12x + 6h) = 12x \end{aligned}$$

b)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h) - 3x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3$$

c)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(x+h)^2 + 3(x+h) + 7 - 6x^2 - 3x - 7}{h} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6x^2 + 12xh + 6h^2 + 3x + 3h + 7 - 6x^2 - 3x - 7}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12xh + 6h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12x + 6h + 3) = 12x + 3
\end{aligned}$$

d)  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

3208.a) Gränsvärdet beskriver derivatans värde när  $x = 2$  och funktionen är  $f(x) = x^3$ .

b) Gränsvärdet beskriver derivatans värde när  $x = 4$  och funktionen är  $f(x) = x^2 + 3$ .

c)

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{((4+h)^2 + 3) - (4^2 + 3)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16 + 8h + h^2 + 3 - 16 - 3}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(8+h)}{h} = 8
\end{aligned}$$

(I deluppgift c) är det fel i facit.)

3225. Sekanten har  $k$ -värdet = 4 (olika skala på  $x$  och  $y$ -axel). Det som skall hittas är den punkt på kurvan som har derivatan = 4.

$$4x - 6 = 4 \Rightarrow x = 2.5$$

$$y(x) = 2x^2 - 6x + 2 \Rightarrow y(2.5) = -0.5$$

$$\text{dvs linjen är } y - (-0.5) = 4(x - 2.5) \Rightarrow y = 4x - 10.5$$

3226.

$$y(x) = a(x-2)(x-4) \text{ men } y(0) = p \text{ dvs } a = \frac{p}{8}$$

$$y(x) = \frac{p}{8}(x^2 - 6x + 8) \Rightarrow y'(x) = \frac{p}{8}(2x - 6) \Rightarrow y'(0) = -\frac{6p}{8} = -\frac{3p}{4}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3p}{4}x$$

3234.  $N(t) = 3t^2 + 48t + 510$  bakterier i tidpunkt  $t$ .

a)  $N(0) = 510$  bakterier från början.

$$b) 3t^2 + 48t + 510 = 1020 \Rightarrow 3t^2 + 48t - 510 = 0 \Rightarrow t^2 + 16t - 170 = 0$$

$$t = -8 \pm \sqrt{64 - 170} \approx 7.3 \text{ timmar}$$

c)  $N'(t) = 6t + 48 \Rightarrow N'(4) = 24 + 48 = 72$  bakterier/h

$$d) N'(t) = 6t + 48 = 50 \Rightarrow t = \frac{2}{6} = 20 \text{ minuter}$$

$$3235. s(t) = 40t - 0.3t^2$$

$$a) s(10) = 40 \cdot 10 - 0.3 \cdot 10^2 = 370 \text{ m, så långt tåget kommit efter 10 sekunder.}$$

$$b) s'(t) = 40 - 0.6t \Rightarrow s'(10) = 40 - 0.6 \cdot 10 = 34 \text{ m/s, tågets hastighet efter 10 s.}$$

$$c) s'(t) = 0 \text{ då } 40 = 0.6t \text{ dvs } t = \frac{40}{0.6} \approx 67 \text{ sekunder.}$$

$$d) s\left(\frac{40}{0.6}\right) = 40 \cdot \frac{40}{0.6} - 0.3 \left(\frac{40}{0.6}\right)^2 \approx 1300 \text{ m}$$

$$e) \text{ Efter 67 sekunder står tåget stilla dvs: } 0 \leq t \leq 67 \text{ s}$$

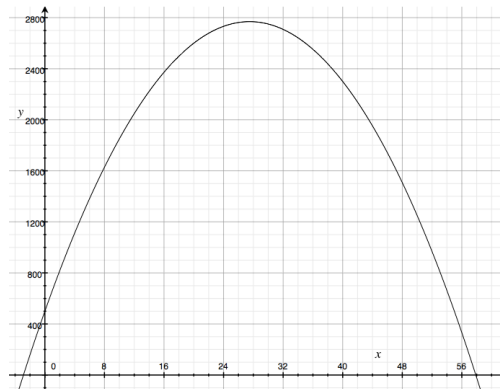
3237. Avståndet mellan löparna kan uttryckas som  $f(t) - g(t) = t - 0.2t^2$ . Derivatan av avståndet blir  $1 - 0.4t$ . Derivatan har ett nollställe då  $t = 2.5$ . Avståndet är då som störst:

$$2.5 - 0.2 \cdot 2.5^2 = 1.25 \text{ m}$$

3303.

$$N(t) = 500 + 165t - 3t^2 \Rightarrow N'(t) = 165 - 6t$$

Det som frågas efter är när  $N'(t) > 0$ . Svaret är att  $N'(t) > 0$  då  $t < \frac{165}{6} = 27.5$  minuter.



3304. a)

$$f(x) = 2x^2 - x^4 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2) = 4x(1 + x)(1 - x)$$

$$f'(x) = 0 \text{ då } x = -1, 0 \text{ eller } 1$$

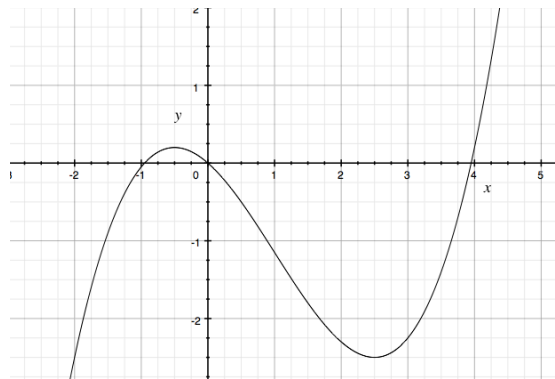
Ett teckenschema visar:

	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
$x$	-	-	-	0	+	+	+
$1 - x$	+	+	+	+	+	0	-
$1 + x$	-	0	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
riktning	↗	0	↘	0	↗	0	↘

Dvs  $f(x)$  är avtagande då  $-1 < x < 0$  och då  $x > 1$ .

3307.  $f(x) = 0.2x^3 - 0.6x^2 - 0.75x \Rightarrow f'(x) = 0.6x^2 - 1.2x - 0.75 = 0$  då

$$x^2 - 2x - 1.25 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1 + 1.25} = \begin{cases} 2.5 \\ -0.5 \end{cases}$$



3316.  $f'(x) = x \cdot (x - a)^2 = x(x^2 - 2ax + a^2) = x^3 - 2ax^2 + xa^2 \Rightarrow$

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}x^2a^2 + C$$

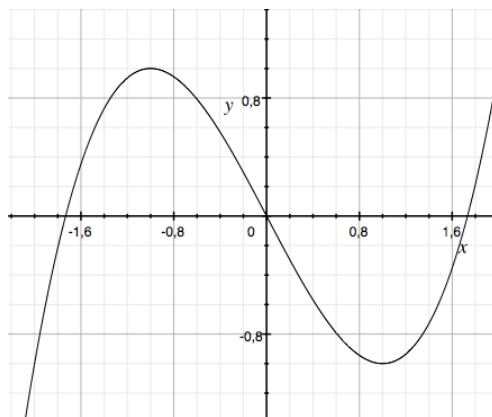
För  $a = 5$  och  $C = 0$  finns funktionen och derivatan i figuren nedan.



3317.  $f(x) = ax^3 + bx \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + b$ . Villkoren ger:

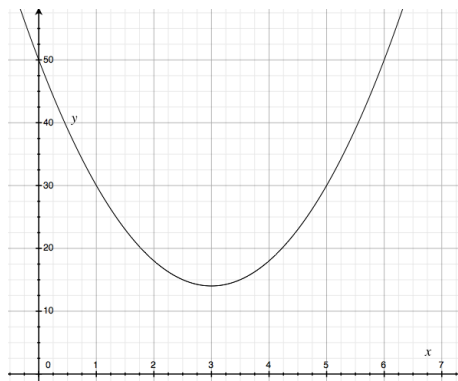
$$\begin{cases} f(1) = -1 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Dvs:  $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 3x)$



3318.  $y(x) = ax^2 + bx + 50 \Rightarrow y'(x) = 2ax + b$  Villkoren ger:

$$\begin{cases} y(3) = 14 \\ y'(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a + 3b + 50 = 14 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -24 \end{cases}$$



3327.

$$f(x) = ax^2 + 3x - 2 \Rightarrow f'(x) = 2ax + 3 \Rightarrow f'(3) = 6a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

3328.  $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b = 0 \Rightarrow b = 0$

För att det skall bli en maxpunkt på positiva y-axeln måste  $a < 0$  och  $c > 0$ .

3340.

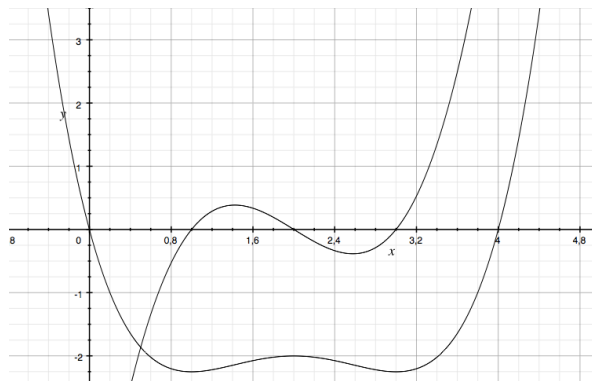
$$f(x) = x^3 - 12x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 \text{ dvs kurva c)}$$

3341. I min och maxpunkter är derivatan = 0. I en maxpunkt byter derivatan tecken från + till - och i en minpunkt tvärtom. Detta gäller kurva d).

3342.

$$f'(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) = a(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \Rightarrow$$

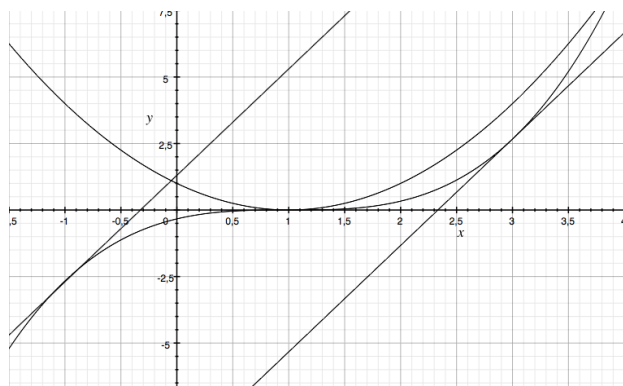
$$f(x) = a \left( \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x + C \right)$$



3343.

$$8x - 2y = 16 \Leftrightarrow y = 4x - 8 \text{ dvs } k = 4$$

$$f'(x) = (x-1)^2 = 4 \text{ när } x_1 = -1 \text{ och } x_2 = 3$$



3351. a)

$$s(t) = 0.5t^2 - 0.06t^3, v(t) = s'(t) = t - 0.18t^2 = 0 \text{ då } \begin{cases} t_1 = 0 \text{ s} \\ t_2 = \frac{1}{0.18} \approx 5.6 \text{ s} \end{cases}$$

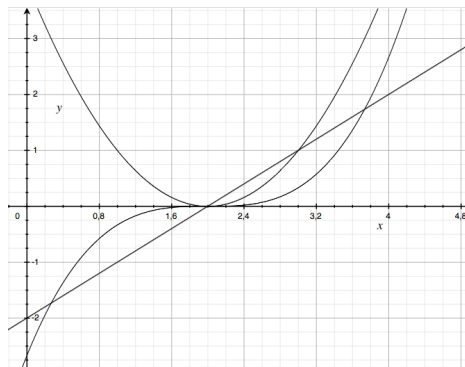
$$s\left(\frac{1}{0.18}\right) = 0.5\left(\frac{1}{0.18}\right)^2 - 0.06\left(\frac{1}{0.18}\right)^3 \approx 5.1 \text{ m}$$

b)

$$s''(t) = 1 - 0.36t \Rightarrow s''(0) = 1 \text{ m/s}^2$$

3352.

$$f'(x) = (x - 2)^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}(x - 2)^3 + C \text{ och } f''(x) = x - 2$$





3354.

$$V(x) = 999.9 - 0.0643x + 0.0085x^2 - 0.000068x^3 \Rightarrow$$

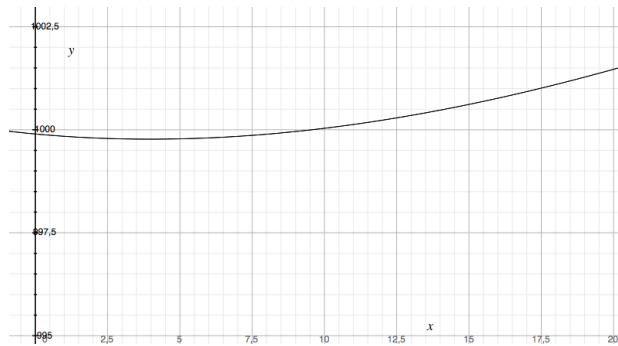
$$V'(x) = -0.0643 + 2 \cdot 0.0085x - 3 \cdot 0.000068x^2 \Rightarrow$$

$$0 = -0.0643 + 2 \cdot 0.0085x - 3 \cdot 0.000068x^2$$

$$x^2 - \frac{2 \cdot 0.0085}{3 \cdot 0.000068}x + \frac{0.0643}{3 \cdot 0.000068} = 0$$

$$x = \frac{0.0085}{3 \cdot 0.000068} \pm \sqrt{\left(\frac{0.0085}{3 \cdot 0.000068}\right)^2 - \frac{0.0643}{3 \cdot 0.000068}} \approx 42 \pm 38$$

$$x \approx 4 \text{ } ^\circ\text{C}$$



3359. Kalla kortsidorna  $x$  och långsidan  $\frac{0}{2} - x$ . Då blir arean  $A(x) = x \left(\frac{0}{2} - x\right)$   
Kostnaden fås som  $2x \cdot 200 + \left(\frac{0}{2} - x\right) \cdot 200 + \left(\frac{0}{2} - x\right) 440 = 64\,000$  dvs

$$\left(\frac{0}{2} - x\right) = \frac{1}{640}(64\,000 - 400x)$$

Och:

$$A(x) = x \frac{1}{640}(64\,000 - 400x) = \frac{1}{640}(64\,000x - 400x^2)$$

$$A'(x) = \frac{1}{640}(64\,000 - 800x) = 0 \Rightarrow x = 80 \text{ m}$$

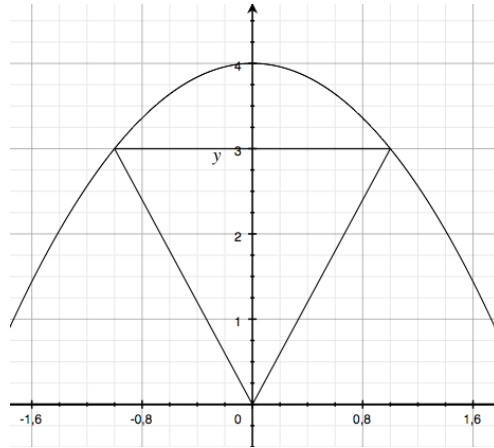
$$A(80) = \frac{80}{640}(64\,000 - 400 \cdot 80) = 4000 \text{ m}^2$$

3364. Kalla två sidor  $x$ , då blir den tredje sidan  $40 - 2x$  och arean kan tecknas:

$$A = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2 \Rightarrow A'(x) = 40 - 4x = 0 \text{ då } x = 10$$

Arean blir sålunda  $A(10) = 10(40 - 20) = 200 \text{ cm}^2$

3365.

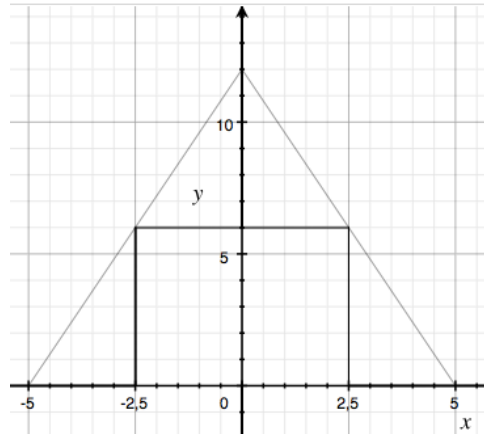


Triangelns area kan tecknas som:

$$A = \frac{1}{2} 2x \cdot (4 - x^2) = 4x - x^3 \Rightarrow A'(x) = 4 - 3x^2 = 0 \text{ då } x = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1.15$$

$$A_{max} = 4 \sqrt{\frac{4}{3}} - \left( \sqrt{\frac{4}{3}} \right)^3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8}{3} \approx 3.1 \text{ a. e.}$$

3366.



Rektangelns area kan tecknas som:

$$A = 2x \cdot 12 \left(1 - \frac{x}{5}\right) = 24 \left(x - \frac{x^2}{5}\right) \Rightarrow A'(x) = 24 \left(1 - \frac{2x}{5}\right) = 0 \text{ då } x = \frac{5}{2}$$

$$A_{max} = 24 \left(\frac{5}{2} - \frac{25}{4 \cdot 5}\right) = 30 \text{ cm}^2$$

3367. Låt radien på cylindern vara  $r$  och höjden  $h$ . Total åtgång av plåt blir:

$$A(r, h) = \pi r^2 + \frac{1}{2} 4\pi r^2 + 2\pi r h = 3\pi r^2 + 2\pi r h = 70 \Rightarrow h = \frac{70 - 3\pi r^2}{2\pi r}$$

$$V(r, h) = \pi r^2 h + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \pi r^2 \frac{70 - 3\pi r^2}{2\pi r} + \frac{2}{3} \pi r^3 = r \frac{70 - 3\pi r^2}{2} + \frac{2}{3} \pi r^3 =$$

$$= \frac{70r - 3\pi r^3}{2} + \frac{2}{3} \pi r^3 = 35r - \frac{5}{6} \pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 35 - \frac{5}{2} \pi r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{14}{\pi}$$

Golvarea vid maximal volym:

$$A_{\text{vid max volym}} = \pi r^2 = \pi \frac{14}{\pi} = 14 \text{ m}^2$$

3405. a)

$$\frac{1}{2 + \sqrt{x}} = \frac{2 - \sqrt{x}}{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} = \frac{2 - \sqrt{x}}{4 - x}$$

b)

$$\frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

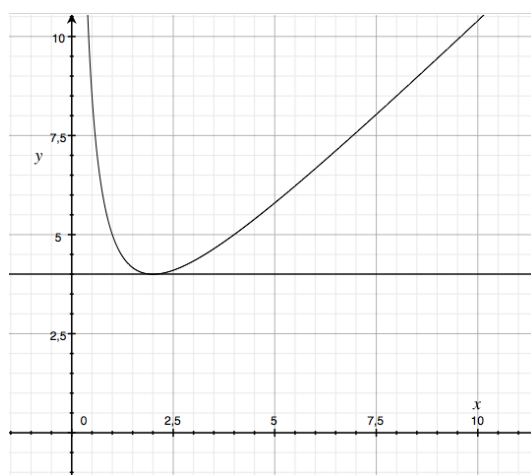
$$3416. f(x) = 8\sqrt{x} = 8x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 8 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow x = 16$$

Då  $x = 16$  lutar kurvan med  $k = 1$ .

3417.

$$y(x) = x + \frac{4}{x} \Rightarrow y'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} \text{ men } y(2) = 4 \text{ och } y'(2) = 0$$

Tangenten beskrivs av linjen  $y = 4$ .



3418. a)  $f'(t) = 4t^3$

b)  $f'(t) = 3$

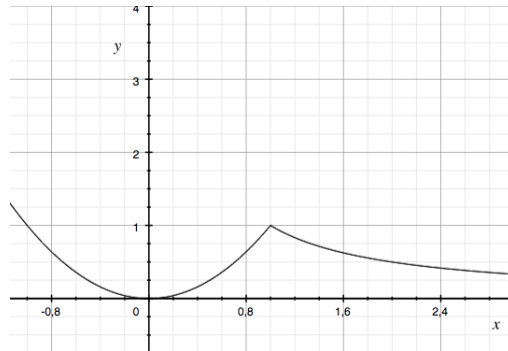
c)  $f'(t) = v_0 + at$

3419.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 - (x+h)^2}{h(x+h)^2 x^2} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^2 - 2xh - h^2}{h(x+h)^2 x^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2x - h}{(x+h)^2 x^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2x - h}{(x+h)^2 x^2} = -\frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

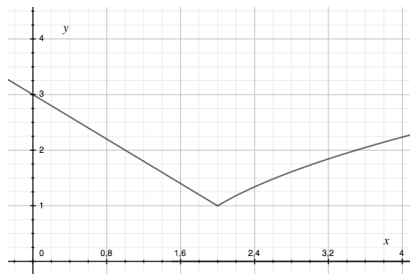
3425. a)

$$1^2 + C = \frac{1}{1} \Rightarrow C = 0$$



b)

$$5C - 2 = \sqrt{4 - 5C} \Rightarrow 25C^2 - 20C + 4 = 4 - 5C \Rightarrow 25C^2 = 15C \Rightarrow C = 0.6$$



### Test 3

1. a)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x + 5)(x - 5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} x + 5 = 10$$

b)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3 + h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20 + 0.98^x}{5} = 4$$

2. a)

$$y = x^5 - 4x^3 + 9x - 4 \Rightarrow y' = 5x^4 - 12x^2 + 9$$

b)

$$y = (5x - 1)(5x + 1) = 25x^2 - 1 \Rightarrow y' = 50x$$

3. a)

$$f(x) = 3x^3 - x^2 \Rightarrow f'(x) = 9x^2 - 2x \Rightarrow f'(4) = 9 \cdot 16 - 8 = 136$$

b)

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \Rightarrow f'(4) = \frac{4}{2} - \frac{16}{2} = -6$$

c)

$$f(x) = 3x - 7 \Rightarrow f'(x) = 3 \Rightarrow f'(4) = 3$$

4. a)  $f(0) = 3$

b)  $f(2) = 1$

c)  $f'(1) = 0$

d)  $f'(2) \approx 3$

e)  $f'(x) > 0$  då  $1 < x < 3$

5. a)  $f(x) = 5x^7 - 3x^4 + 10^2 \Rightarrow f'(x) = 35x^6 - 12x^3$

b)  $g(x) = -0.5x^4 + 4x^2 - 5x + c^3 \Rightarrow g'(x) = -2x^3 + 8x - 5$

c)  $h(u) = 8\sqrt{u} - u^{-2} + 2u^{1.3} \Rightarrow h'(u) = \frac{4}{\sqrt{u}} + 2u^{-3} + 2.6u^{0.3}$

6.  $y(x) = x^3 - 6x + 2 \Rightarrow y'(x) = 3x^2 - 6 \Rightarrow y'(1) = -3$  punkten  $(1, -3) \Rightarrow y = -3x$

7.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+h)^2 - 3 \cdot 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + 6h + 3h^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + 3h) = 6$$

8. Punkterna är  $(1, 5)$  och  $(3, 9) \Rightarrow k = 2, f'(x) = 6 - 2x = 2 \Rightarrow x = 2, y = 8$

$$\text{dvs } y = 4 + 2x$$

9.  $s(t) = 3t^2 + 5t \Rightarrow s'(t) = 6t + 5 \Rightarrow s(2) = 22$  m och  $s'(2) = 17$  m/s

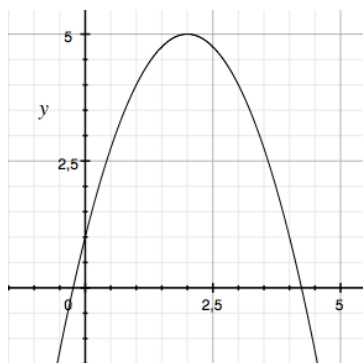
Efter 2 sekunder har föremålet rört sig 22 m och har hastigheten 17 m/s.

10. a)  $f(x) = x^{99} \Rightarrow f'(x) = 99x^{98} \Rightarrow f'(-1) = 99$

b)  $f(x) = (x - 3)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x - 3) \Rightarrow f'(-1) = -8$

c)  $f(x) = 7x \Rightarrow f'(x) = 7 \Rightarrow f'(-1) = 7$

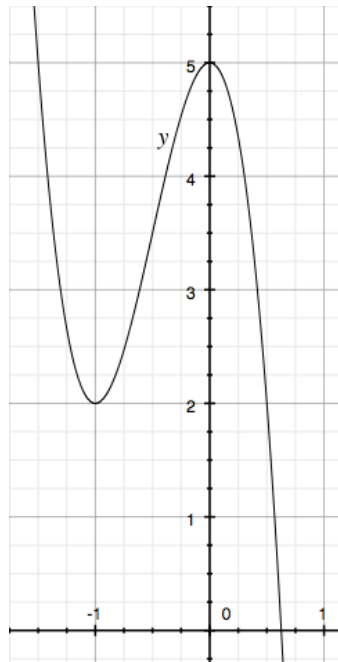
11. till exempel  $g(x) = -x^2 + 4x + 1 \Rightarrow g'(x) = -2x + 4$



12.

$$y = ax^3 - 9x^2 + 5 \Rightarrow y' = 3ax^2 - 18x, y'(-1) = 3a + 18 = 0 \Rightarrow a = -6$$

$$y = -6x^3 - 9x^2 + 5, \text{växande då } -1 \leq x \leq 0$$



13. En inflexionspunkt betyder att funktionen stiger för  $x < 5$  och för  $x > 5$ . Derivatans är alltså positiv utom då  $x = 5$  då är  $g'(x) = 0 \Rightarrow$  är  $g''(5) = 0$ .

14. a) Då  $x = 0$  och  $x = 3$ .

b) När  $x > 3$ .

c) Då  $x < 3$ .

d) När  $x = 0$  och  $x = 3$ .

$$15. h''(x) = 6x \Rightarrow h'(x) = 3x^2 + C_1 \Rightarrow h(x) = x^3 + C_1x + C_2$$

$$16. y'(x) = (x - 2)^2 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{3}(x - 2)^3 + C$$

$$17. s(t) = 20t - 5t^2 \Rightarrow s'(t) = 20 - 10t$$

$$a) s'(1.5) = 5 \text{ m/s}$$

$$b) s(3) = 20 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 15 \text{ m}$$

$$c) s'(t) = 20 - 10t = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

$$d) s(2) = 20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 20 \text{ m}$$

18. a)

$$V(p) = 50\,000p - 20p^2 - 80\,000 \Rightarrow V'(p) = 50\,000 - 40p = 0 \Rightarrow p = 1\,250 \text{ kr}$$

b)

$$V(1\,250) \approx 31 \text{ miljoner kr}$$

19.

$$m(t) = 4.5 \cdot t^{0.25} \Rightarrow m'(t) = 1.125 \cdot t^{-0.75} \Rightarrow m'(10) \approx 0.2 \text{ kg/min}$$

Ismassan växer med 0.2 kg/min vid tiden 10 minuter.

20. a)

$$y = \frac{x(14-x)}{2}$$

b)  $0 < x < 14$

c)

$$y = \frac{x(14-x)}{2} = \frac{1}{2}(14x - x^2) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}(14 - 2x) = 0, x = 7$$

$$y_{\max} = \frac{7(14-7)}{2} = 24.5 \text{ cm}^2$$

21. a)

$$A(x) = x \cdot (-0.5x + 4) \text{ a. e.}$$

b)  $0 < x < 8$

c)

$$A(x) = -0.5x^2 + 4x \Rightarrow A'(x) = -x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$A(4) = 4 \cdot (-0.5 \cdot 4 + 4) = 8 \text{ a. e.}$$

22.

$$y = 8x - x^2 \Rightarrow y' = 8 - 2x = -2 \Rightarrow x = 5$$

$$y(5) = 8 \cdot 5 - 5^2 = 15 \Rightarrow (5, 15)$$

23.

$$N(x) = 40\,000 + 1\,000x + 200x^2$$

a)

$$N(3) = 40\,000 + 1\,000 \cdot 3 + 200 \cdot 3^2 = 44\,800 \text{ st}$$

b)

$$N(5) = 40\,000 + 1\,000 \cdot 5 + 200 \cdot 5^2 = 50\,000 \text{ st}$$

Ökning cirka 5 000 st.

c) Ökningen klockan 12 är:

$$N'(x) = 1\,000 + 400x, N'(3) = 1\,000 + 400 \cdot 3 = 2\,200 \text{ st/timme}$$

24.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{för } x \leq 4 \\ x + C & \text{för } x > 4 \end{cases} \Rightarrow C = 12$$

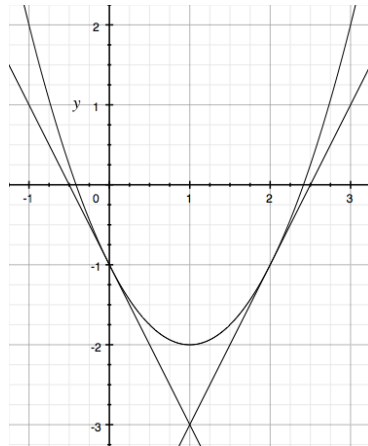
25.

$$y = x^2 - 2x - 1 \Rightarrow y' = 2x - 2$$

Den ena linjen går genom  $(0, -1)$  och lutar  $k = -2$ ,  $y_1 = -2x - 1$ .

Den andra går genom  $(2, -1)$  och lutar  $k = 2$ ,  $y_2 = -5 + 2x$ .

$$-1 - 2x = -5 + 2x \Rightarrow x = 1, y = -3$$



26.

$$V(r) = \pi r^2(6.4 - r) = \pi(6.4r^2 - r^3) \Rightarrow V'(r) = \pi(12.8r - 3r^2) = 0$$

$$r = \frac{12.8}{3} \approx 4.3 \text{ cm} \Rightarrow V_{\max} \left( \frac{12.8}{3} \right) = \pi r^2(6.4 - r) \approx 122 \text{ cm}^3$$

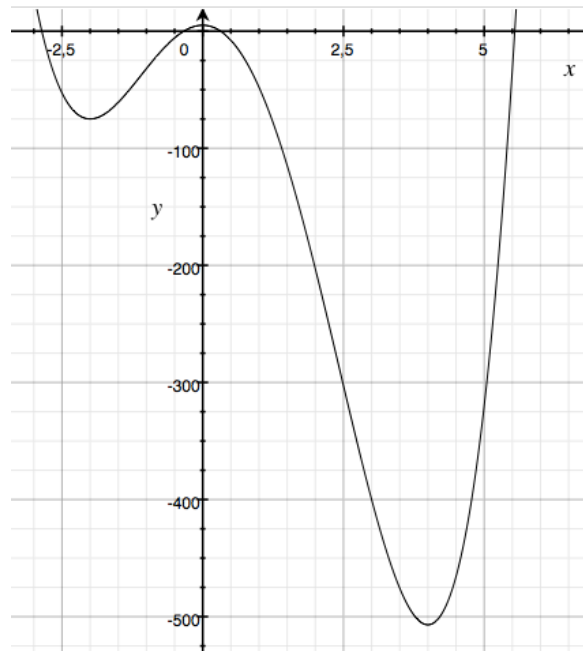
27.

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 48x^2 + 5 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 96x = 12x(x^2 - 2x - 8) = 0$$
$$f'(x) = 12x(x - 4)(x + 2)$$

Största värde finns i gränsen  $x = -3$ . Minsta värdet i  $x = 4$ .

$$f(-3) = 3(-3)^4 - 8(-3)^3 - 48(-3)^2 + 5 = 32$$

$$f(4) = 3(4)^4 - 8(4)^3 - 48(4)^2 + 5 = -507$$



28. a)

$$f(x) = x^4 + 5$$

b)

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(3) = 4 \cdot 3^3 = 108$$

$$\text{Punkten är } (3, 86) \Rightarrow y = -238 + 108x$$

## Blandade uppgifter

1. a)  $y(5) = 3 \cdot 5^2 = 75^\circ \text{C}$

b)  $\Delta y = y(5.1) - y(4.9) = 3(5.1^2 - 4.9^2) = 6^\circ \text{C}$

c) Den genomsnittliga temperaturförändringen vid 5 minuter är:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{0.2} = 30^\circ \text{C/minut}$$

2. a)  $f'(x) = 32x^7 - 20x^3 + 17$

b)  $g'(t) = -2t^3 + 6t - 7$

c) fel variabel i uppgiften  $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 8x^{-5} + 3.4x^{0.7}$

3. a)  $f'(0) = 2$

b)  $f'(2) = 0$

c)  $f'(4) = -2$

4. Växande (men inte strikt växande) för  $x \leq 2$  och  $x \geq 7$ . Avtagande då  $2 < x < 7$ .

5. Terrasspunkt i  $(-3, 4)$ , lokalt max i  $(2, 9)$  och lokalt min i  $(7, 1)$ .

6. a)  $y(x) = 2x^4 - x^2 \Rightarrow y'(x) = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1) = 2x(2x + 1)(2x - 1)$

Ett teckenschema visar:

	-1	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	1
$x$	-	-	-	0	+	+	+
$2x + 1$	-	0	+	+	+	+	+
$2x - 1$	-	-	-	-	-	0	+
$y'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
riktning	↘	0	↗	0	↘	0	↗

$x = -0.5$  minpunkt,  $x = 0$  maxpunkt,  $x = 0.5$  minpunkt

b)  $y(x) = 3x^2 \Rightarrow y'(x) = 6x \Rightarrow y''(x) = 6 > 0 \Rightarrow$  minpunkt

c)  $y(x) = x^3 \Rightarrow y'(x) = 3x^2$

Ett teckenschema visar:

	-1	0	1
$y'(x)$	+	0	+
riktning	↗	0	↗

Dvs terrasspunkt.

$$d) y(x) = x^4 - x \Rightarrow y'(x) = 4x^3 - 1 = 0 \text{ då } x = 4^{-3} = \frac{1}{64}$$

Ett teckenschema visar:

	0	$4^{-3}$	1
$y'(x)$	-	0	+
riktning	$\searrow$	0	$\nearrow$

$(0, 0)$  är inget lokalt max eller min. Minpunkten finns i  $(4^{-3}, -0.02)$

$$7. N(t) = 2t^3 + 50$$

$$a) N(5) = 2 \cdot 5^3 + 50 = 300 \text{ bakterier}$$

$$b) \frac{dN(t)}{dt} = 6t^2 \frac{\text{bakterier}}{\text{minut}} \text{ dvs } \frac{dN(1)}{dt} = 6 \text{ bakterier/minut}$$

$$c) \frac{dN(5)}{dt} = 150 \frac{\text{bakterier}}{\text{minut}}$$

8. a)  $y = 0$  i punkterna B och E.

b)  $y'(x) = 0$  i punkterna C och F.

c)  $y'(x) < 0$  i punkterna A och B.

$$9. a) y(x) = 12x - x^3 \Rightarrow y'(x) = 12 - 3x^2 = 0 \text{ då } x = \pm 2$$

Ett teckenschema visar:

	-3	-2	0	2	-3
$y'$	-	0	+	0	-
riktning	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$

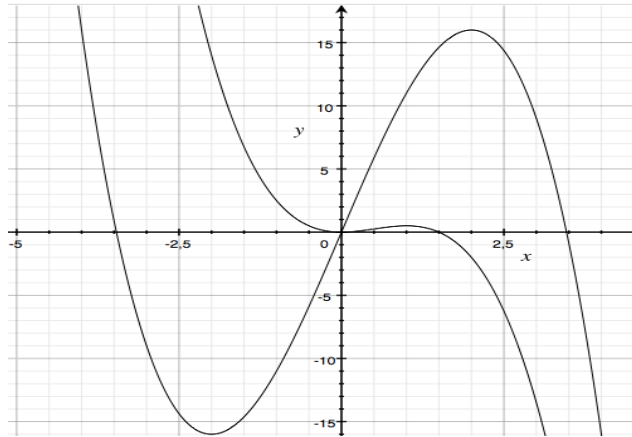
$x = -2$  ger ett lokalt minimum  $(-2, -16)$  och  $x = 2$  ger ett lokalt maximum  $(2, 16)$

$$b) y(x) = 1.5x^2 - x^3 \Rightarrow y'(x) = 3x - 3x^2 = 3x(1 - x)$$

Ett teckenschema visar:

	-1	0	0.5	1	2
$y'$	-	0	+	0	-
riktning	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$

$(0,0)$  är ett lokalt minimum,  $(1, 0.5)$  är ett lokalt maximum



10.  $y(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x \Rightarrow y'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$  och  $y'(-1) = -2$   
 Vilket betyder att  $y(x)$  är avtagande då  $x = -1$ .

11. a)  $g(1) = 3$  läses direkt i figuren

b) I punkten  $(2, 4)$  finns en maxpunkt dvs  $g'(2) = 0$ .

c) Funktionen är strikt växande då  $x < 2$ .

d)  $g'(x) < 0$  då funktionen är avtagande dvs då  $x > 2$ .

e)  $g(x) = 0$  då  $x = 0$  och då  $x = 4$ .

12. a)  $f(x) = 12x - x^3 \Rightarrow f'(x) = 12 - 3x^2$  dvs  $f'(x) = 0$  då  $x = \pm 2$ .

b)

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-6)}{2} = \frac{1}{2}(x^2 - 4x - 12) \Rightarrow f'(x) = x - 2 = 0 \text{ då } x = 2$$

13. a)  $f'(x) = 0$  då  $x = 0$  och då  $x = 4$ .

b)  $f(x)$  är strikt växande då  $f'(x) > 0$  dvs då  $0 < x < 4$ .

14. a)

b)  $g(2.1) \approx g(2) + k \cdot 0.1 = 3 + (-1) \cdot 0.1 = 2.9$

15. a)  $g(-1) = 2$  läses direkt i figuren.

b) Linjens lutning verkar ha  $k = -2$  dvs  $g'(0) = -2$ .

c) Vid  $x = 1$  finns en minpunkt dvs  $g'(1) = 0$ .

16.  $s(t) = 2t^2 - 12t + 25 \Rightarrow s'(t) = 4t - 12 = 0$  då  $t = 3$

Gör en värdetabell där intervallets gränser och  $t = 3$  ingår.

$t$	$s(t)$
2	9
3	7
5	15

Det största värdet är 15, det minsta 7.

$$17. f(x) = 3x^2 - ax \Rightarrow f'(x) = 6x - a, f'(2) = 6 \cdot 2 - a = -1 \Rightarrow a = 13$$

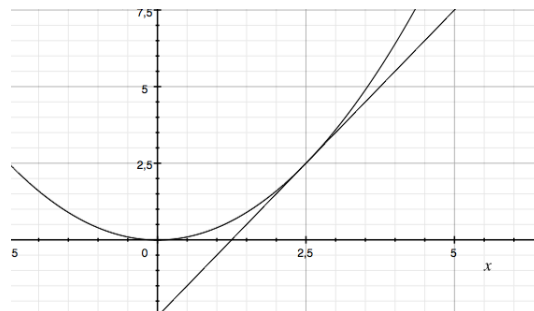
$$18. s(t) = t^3 - 120t^2 \Rightarrow s'(t) = 3t^2 - 240t, s'(t) = 0 \text{ då } 3t(t - 80) = 0$$

Gör en värdetabell där intervallets gränser och  $t = 80$  ingår.

$t$	$s(t)$
0	0
80	-256 000
100	-200 000

Svar: Det största värdet är 0 och det minsta är -256 000.

19.  $y(x) = 0.4x^2 \Rightarrow y'(x) = 0.8x, k = y'(2.5) = 2$  och punkten är  $(2.5, 2.5)$  det ger linjen  $y = 2x - 2.5$  som skär x-axeln i punkten  $(1.25, 0)$ .



20. a)  $g'(x) = 0$  i punkterna B, D och F.

b)  $g'(x) < 0$  i punkterna A och E.

c) Ja,  $g(x)$  avtar då  $g'(x) < 0$  i punkten A.

$$21. f(x) = ax^3 + x \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 1, f'(2) = 3a \cdot 4 + 1 = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$22. y(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \Rightarrow y'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2$$

Dvs en terrasspunkt då  $x = 1$ , och dess koordinater är  $(1, 1)$ .

23. a) Klockan 23 är vattendjupet 2.3 m.

b) Klockan 23 stiger vattennivån med hastigheten 20 cm/timme.

c) Klockan 02:00 är vattendjupet 4 m men det stiger inte. När  $y'' < 0$  byter  $y'$  tecken från + till -, dvs en maxpunkt.

$$24. y(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2 \Rightarrow y'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1)$$

Terrasspunkten finns där derivatan har ett dubbelt nollställe dvs då  $x = 0$ . Punkten är  $(0, 2)$ .

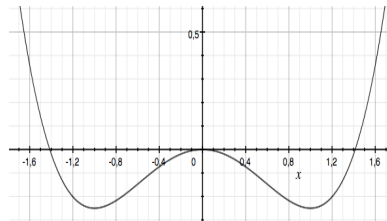
25.

$$y(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \Rightarrow y'(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1)$$

Gör ett teckenschema:

	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
$x$	-	-	-	0	+	+	+
$x + 1$	-	0	+	+	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	-	-	0	+
produkt	-	0	+	0	-	0	+
riktning	↘	→	↗	→	↘	→	↗

Svar: Fallande då  $x < -1$ , och då  $0 < x < 1$  och växande då  $-1 < x < 0$  och då  $x > 1$ .



26.  $y(x) = x^3 - 12x \Rightarrow y'(x) = 3x^2 - 12 = 0$  då  $x = \pm 2$   
 Punkterna är  $(-2, 16)$  och  $(2, -16)$  dvs linjen blir  $y = -8x$ .

27.  $6x + y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3 - 6x$  och  $y(x) = x^2 - 4x - 8 \Rightarrow y'(x) = 2x - 4$

$$2x - 4 = -6 \text{ då } x = -1 \text{ dvs i punkten } (-1, -3)$$

28. a) När tillflödet varit längs tid dvs B.

b) Utflödet är störst i punkten C.

c) När utflödet pågått längst tid dvs D.

d) Högsta antal l/min dvs A.

29.  $h(t) = 24t^2 - t^3 \Rightarrow h'(t) = 48t - 3t^2 = 3t(16 - t) = 0$  då  $t = 0$  och då  $t = 16$

Maximal höjd blir  $h(16) = 16^2(24 - 16) = 2048 \text{ m} \approx 2 \text{ km}$

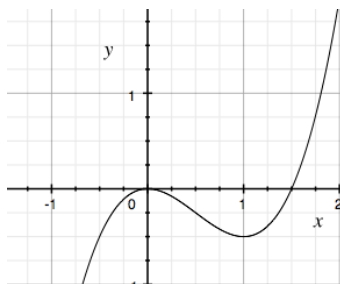
30.  $y(x) = x^3 - 1.5x^2 \Rightarrow y'(x) = 3x^2 - 3x = 3x(x - 1)$

Gör ett teckenschema:

	-1	0	0.5	1	2
$x$	-	0	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	0	+
produkt	+	0	-	0	+
riktning	↗	→	↘	→	↗

Vi ser att maxpunkten finns då  $x = 0$  och dess koordinater är  $(0,0)$ .

Tangenten är linjen  $y = 0$  den skär kurvan då  $x^3 - 1.5x^2 = 0 \Rightarrow x = 1.5$  dvs i  $(1.5, 0)$ .



31.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 4^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16 + 8h + h^2 - 16}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(8+h)}{h} = 8 \end{aligned}$$

Derivatan av  $x^2$  i punkten  $x = 4$ .

32. Kurvan kan skrivas som  $f(x) = k(x-1)(x-2)$  där  $k = 1.5$ .

$$f(x) = 1.5x^2 - 4.5x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x - 4.5 \text{ dvs } f'(0) = -4.5$$

Tangentens ekvation är  $y = 3 - 4.5x$  vilken skär  $x$ -axeln i punkten  $(\frac{2}{3}, 0)$ .

33. Kalla rektangelns sidor  $a$  och  $b$ , då gäller:  $2a + b = 28$  och arean  $A(a)$

$$A(a) = ab = a(28 - 2a) \text{ och } \frac{dA(a)}{da} = 28 - 4a = 0 \text{ då } a = 7 \Rightarrow A_{max} = 98 \text{ m}^2$$

34.  $y'(x) = 3ax^2 + b = 0$  då  $x = 1$  dvs  $b = -3a$

$$a - 3a + 10 = -8 \Rightarrow a = 9 \text{ och } b = -27$$

35. Låt behållarens bottensida vara  $b$ , då gäller:

$$b^2 h = 27 \text{ och } k(b) = 500b^2 + 200 \cdot 4hb = 500b^2 + 27 \frac{800}{b} \Rightarrow$$



$$\frac{dk(b)}{db} = 1000b - 27 \frac{800}{b^2} = 0 \Rightarrow b = \sqrt[3]{27 \cdot 0.8} \approx 2.8 \text{ m}$$

$$k(\sqrt[3]{27 \cdot 0.8}) \approx 11\,600 \text{ kr}$$

36.

$$g(3) = 10, -1 \leq g'(x) \leq 1.2 \Rightarrow g(7) \geq 10 + 4(-1) = 6$$

37.

$$u(t) = at^2 + vt - \frac{c}{t} \Rightarrow \frac{du(t)}{dt} = 2at + v + \frac{c}{t^2} \Rightarrow \frac{d^2u(t)}{dt^2} = 2a - \frac{2c}{t^3}$$

38. Nollställena är  $x = -4$ ,  $x = 1$  och  $x = 3$ .  $m$  ligger mellan  $-4$  och  $1$  dvs  $m = -1.5$ .

a)  $y'(x) = 3x^2 - 13$  dvs  $y'(-1.5) = -6.25$  och punkter  $M = (-1.5, 28.125)$ . Från  $m$  till linjen skär  $x$ -axeln är det sålunda:  $28.125 - a \cdot 6.25 = 0 \Rightarrow a = 4.5$  steg i  $x$ -led.  
 $-1.5 + 4.5 = 3$  VSV

b)  $y'(2) = 3 \cdot 4 - 13 = -1$  och  $y(2) = -6$  dvs linjen är  $y_t(x) = 4 - x$   
 Ja, ty  $y_t(-4) = 4 - (-4) = 0$

c)  $y'(-0.5) = 3 \cdot (-0.5)^2 - 13 = -12.25$  och  $y(-0.5) = 18.375$  och då

$$-12.25 \cdot 1.5 + 18.375 = 0$$

kommer tangenten att skära  $x$ -axeln i nollstället  $x = 1$ .

39. Ta ett mindre intervall än  $0.2$ , till exempel  $0.1$ :

$$y'(x) \approx \frac{\sqrt{3 \cdot 2.05} - \sqrt{3 \cdot 1.95}}{2.05 - 1.95}$$

40. a)

$$y(x) = \sqrt{x} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ dvs } y'(4) = \frac{1}{4} \Rightarrow k_{normal} = -4$$

Genom punkten  $(2, 4) \Rightarrow y_{normal}(x) = 18 - 4x$

b)  $y(x) = 0.2x^2 \Rightarrow y'(x) = 0.4x \Rightarrow k_{normal} = -\frac{2.5}{x}$  Tag en punkt  $(h, 0.2h^2)$

Då blir normalen  $\frac{-2.5}{h}$  och linjen  $y - 0.2h^2 = -\frac{2.5}{h}(x - h) \Leftrightarrow y = -\frac{2.5}{h}x + 2.5 + 0.2h^2$

Den linjen skär  $y$ -axeln i punkten  $(0, 2.5 + 0.2h^2)$ . Om  $h$  går mot noll blir punkten  $(0, 2.5)$ .

41. Plåten som går åt kan tecknas som:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Där volymen  $V = \pi r^2 h$  är konstant dvs  $h = \frac{V}{\pi r^2}$ .

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}$$

$$\frac{dA(r)}{dr} = 4\pi r - 2\frac{V}{r^2} = 0 \text{ då } 4\pi r = 2\frac{V}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{V}{2\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \approx 4 \text{ cm, } h \approx 8 \text{ cm}$$

42.

$$f(x) = x^3 + cx^2 + x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2cx + 1$$

En terrasspunkt kräver att derivatan bara har ett nollställe dvs  $3x^2 + 2cx + 1$  är en jämn kvadrat.

$$3x^2 + 2cx + 1 = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}cx + \frac{1}{3}\right) = 3\left(x \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \text{ och } \frac{c}{3} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ dvs } c = \pm\sqrt{3}$$

43. a)

$$f(x) = x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(4) = 8$$

b)

$$\frac{f(4.05) - f(3.95)}{0.1} = 8$$

c)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x$$

44.

$$k(\alpha) = \frac{V_{cyl}}{V_{klot}} = \frac{b \cdot h}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{4\pi r^3} \pi r^2 \sin^2 \alpha \cdot 2r \cos \alpha = \frac{3}{2} \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

$$k'(\alpha) = \frac{3}{2} (2 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha) = 0$$

$$2 \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \Rightarrow \tan^2 \alpha = 2 \Rightarrow \alpha \approx 55^\circ$$

$$k_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.58$$

## Bonusmaterial

a) Den första, andra, tredje gruppen osv borde kunna väljas som:

$$\begin{aligned} & \binom{18}{3} \binom{15}{3} \binom{12}{3} \binom{9}{3} \binom{6}{3} = \\ &= \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \\ &= 3 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \approx 1.4 \cdot 10^{11} \end{aligned}$$

olika sätt.

b) Alltså, av de 6 grupperna skall 4 innehålla ett ess. Detta borde kunna ske på:

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$$

olika sätt.

Delas svaret i a) med b) fås antalet möjliga gruppkonstellationer.