

Matematik 5 svar

Kapitel 2.....	1
Test 2	4

Kapitel 2

2113.

$$\frac{n^3 - n}{3} = \frac{n(n^2 - 1)}{3} = \{\text{konjugatregeln}\} = \frac{(n - 1)n(n + 1)}{3}$$

Av tre på varandra följande tal måste ett vara delbart med 3.

2116. Faktorisera polynomet.

$$a^2 + 3a + 2 = (a + 1)(a + 2)$$

Dvs om $a + 1$ är delbart med 5 är även $a^2 + 3a + 2$ delbart med 5.

2309. $n^2 \equiv 0$ eller $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$

För restklass 0 gäller $n = 3k$ och $n^2 = 9k^2 = 3 \cdot 3k^2 \equiv 0 \pmod{3}$, för restklass 1 gäller $n = 3k + 1$ och $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ och för restklass 2: $n = 3k + 2$ dvs $n^2 = 9k^2 + 12k + 4 \equiv 1 \pmod{3}$ VSV

2317. $(2n)^2 \pmod{4} \equiv 4n^2 \pmod{4} \equiv 0 \pmod{4}$

2318. $(3n + 1)^3 \pmod{9} \equiv (27n^3 + 3 \cdot 9n^2 + 3 \cdot 3n + 1) \pmod{9} \equiv 1 \pmod{9}$

2319. $621 = 6 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1 = 6(99 + 1) + 2(9 + 1) + 1 = 6 \cdot 99 + 2 \cdot 9 + 6 + 2 + 1$
dvs om $6 + 2 + 1 = 9$ är delbart med 3 är talet 621 delbart med 3 VSV.

2320. $(9^n - 1) \pmod{8} \equiv (1^n - 1) \pmod{8} \equiv 0 \pmod{8}$

2321. $1000 \pmod{7} \equiv 6 \pmod{7}$ dvs måndag.

2322. $25^{100} \pmod{24} \equiv 1^{100} \pmod{24}$ dvs klockan 13.

2323. $292 \cdot 429 + 533 \cdot 225 = (288 + 4)(420 + 9) + (528 + 5)(222 + 3) =$
 $= (4 \cdot 3) \pmod{6} + (5 \cdot 3) \pmod{6} \equiv 3 \pmod{6}$

2324. $201672 \pmod{3} = (2 \cdot 100\,000 + 0 \cdot 10\,000 + 1 \cdot 1\,000 + 6 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 2) \pmod{3} =$

$$\begin{aligned}
&= (2 \cdot (99\,9999 + 1) + 1 \cdot (999 + 1) + 6 \cdot (99 + 1) + 7 \cdot (9 + 1) + 2)(\text{mod}3) = \\
&= (2 + 1 + 6 + 7 + 2)(\text{mod}3) \equiv 0(\text{mod}3)
\end{aligned}$$

2325. $a = n \cdot 7 + b$ och $c = m \cdot 7 + d \Rightarrow a + c = n \cdot 7 + b + m \cdot 7 + d \equiv (b + d)(\text{mod}7)$

2413. $7, 10, 13, \dots, 121, 124 \Rightarrow \text{rad}(i) = 7 + (i - 1)3 = 124 \Rightarrow i = 40$ rader \Rightarrow

$$\text{totalt antal stolar} = \frac{1}{2} 40 \cdot (7 + 124) = 2\,620 \text{ stolar}$$

2414. $n = 1$ ger de två första udda talen $1 + 3 = 2^2$, OK, gäller då $n = 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} 1 + 2i &= \sum_{i=0}^n (1 + 2i) + 1 + 2(n + 1) = (n + 1)^2 + 1 + 2(n + 1) = \\
&= n^2 + 2n + 1 + 1 + 2n + 2 = n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2 \text{ VSB}
\end{aligned}$$

2415.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} a - k + a + a + k = 3 \\ \frac{(a - k)^2}{a^2} = \frac{a^2}{(a + k)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ (a - k)^2(a + k)^2 = a^4 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ (a - k)(a + k) = -a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a^2 - k^2 = -a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ k = \sqrt{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

2416.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(0) = b, f'(1) = 2a + b, \dots, f'(9) = 18a + b$$

$$\sum_{i=0}^9 2ax + b = \frac{1}{2}(b + 18a + b)10 = 90a + 10b$$

2429.

$$S_n = 100 \cdot \frac{1.05^{n+1} - 1}{1.05 - 1} = 5000 \Rightarrow 1.05^{n+1} - 1 = 50 \cdot 0.05 \Rightarrow n \approx 25 \text{ år}$$

2430.

$$S_5 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

$$xS_5 = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

$$xS_5 - S_5 = S_5(x - 1) = x^6 - 1 \Rightarrow S_5 = \frac{x^6 - 1}{x - 1}$$

2431.

$$a^2 + h^2 + b^2 + h^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow h^2 = ab \text{ dvs } \frac{a}{h} = \frac{h}{b}$$

Kvoten mellan a , h och b är konstant dvs geometrisk serie.

2432. a) Då element 1 = 2 och element 9 = 512 = $a \cdot k^8$ fås: $a = 2$ och $k = 2$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$a \cdot k$	$a \cdot k^2$	$a \cdot k^3$	$a \cdot k^4$	$a \cdot k^5$	$a \cdot k^6$	$a \cdot k^7$	$a \cdot k^8$
2	4	8	16	32	64	128	256	512

Ny talföljd:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}

Den nya talföljdens kvot = $\frac{1}{2}$

b) Ja, den nya talföljden börjar på a^{-1} och dess kvot blir k^{-1} .

2433. Låt serien vara $a, a \cdot k, a \cdot k^2, a \cdot k^3, a \cdot k^4$. Tag nu logaritmen av termerna:

$$\log a, \log(a \cdot k), \log(a \cdot k^2), \log(a \cdot k^3), \log(a \cdot k^4) \Rightarrow$$

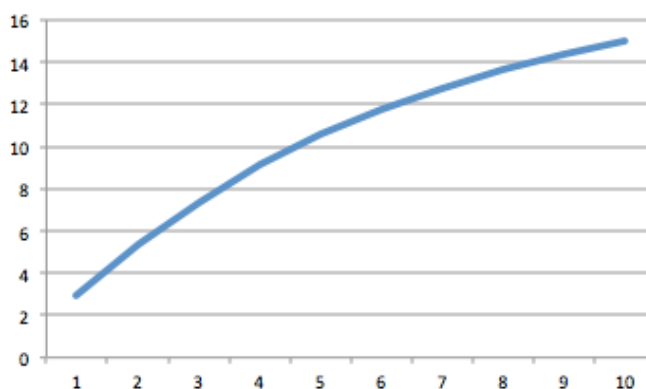
$$\log a, \log a + \log k, \log a + 2 \log k, \log a + 3 \log k, \log a + 4 \log k$$

Detta är en aritmetisk serie VSV.

2434. Då 10 doser givits har 9 timmar förflutit, dvs:

$$a + a \cdot k + a \cdot k^2 + \dots + a \cdot k^9 = a \cdot \frac{k^{10} - 1}{k - 1} = 15 \text{ mg då } k = 0.84 \Rightarrow a = 2.9 \text{ mg}$$

Resonemanget leder till att patienten aldrig har mer än 15 mg i kroppen, därför är den första meningen i uppgiften något vilseledande.



2510. Testa med $n = 0, \Rightarrow (1 + x)^0 \geq 1$, stämmer. Ta nu $n + 1$.

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx) = 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n + 1)x + nx^2$$

dvs

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x \text{ VSB}$$

Enligt induktionsaxiomet gäller då uttrycket för alla $n \in N$ och $x > 0$.

2511. Testa med $n = 1, 1^3 + 2 = 3$, OK delbart med 3. Prova nu $n + 1$

$$\begin{aligned}(n + 1)^3 + 2(n + 1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3 = \\ &= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)\end{aligned}$$

Delbart med 3, enligt induktionsaxiomet är då uttrycket alltid delbart med 3 VSB.

Test 2

1. $3|123, 1732$ är jämnt, 2671 är primtal, $3|3975$

2. Både 28 och 6032 är delbara med 4 , dvs summan är delbar med 4 .

3. Kvot = 6 rest = 1 .

7. $2 + 4 + 6 + \dots + 198 + 200 = (2 + 200) + (4 + 198) + \dots + (100 + 102) = 50 \cdot 202 = 10100$

8. $a_2 = 3 = ck^2, a_4 = 0.75ck^4 \Rightarrow \frac{3}{0.75} = \frac{ck^2}{ck^4} \Rightarrow k^2 = \frac{0.75}{3} = 0.25 \Rightarrow k = 0.5, c = 12 \Rightarrow a_1 = 6$

$$a_i = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i, \text{ Bokens svar är märkligt.}$$

9.

$$z_1 = z_0^2 + (1 + i) = 1 + i$$

$$z_2 = z_1^2 + (1 + i) = (1 + i)^2 + 1 + i = 1 + 2i - 1 + 1 + i = 1 + 3i$$

$$z_3 = z_2^2 + (1 + i) = (1 + 3i)^2 + 1 + i = 1 + 6i - 9 + 1 + i = -7 + 7i$$

10.

$$a_1 = 2a_0 + 1 = 3 = 2^{1+1} - 1 = 3 \text{ OK}$$

$$a_{n+1} = 2^{n+2} - 1 = 2 \cdot 2^{n+1} - 2 + 2 - 1 = 2(2^{n+1} - 1) + 1 = 2a_n + 1 \text{ VSV}$$

11. Tryck på räknaren.

$$22\,320 = 9 \cdot 80 \cdot 31 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 31$$

12. De 4 första primtalen är 2, 3, 5 och 7:

$$2^2 - 1 = 3, 2^3 - 1 = 7, 2^5 - 1 = 31, 2^7 - 1 = 127 \text{ VSV}$$

13.

$$\frac{23450}{48} = 488 + \frac{26}{48}, 26 \text{ eller } 74 \text{ t. ex.}$$

14.

$$2522 = 2047 \cdot 1 + 475$$

$$2047 = 475 \cdot 4 + 147$$

$$475 = 147 \cdot 3 + 34$$

$$147 = 34 \cdot 4 + 11$$

$$34 = 11 \cdot 3 + 1$$

15. $6754 \equiv 3718 \pmod{33} \Rightarrow 6754 \pmod{33} = 22$ och $3718 \pmod{33} = 22 \Rightarrow \text{JA}$

16.

$$\begin{aligned} 80\,000 \cdot 0.08 + 8\,000 + 72\,000 \cdot 0.08 + 8\,000 + \dots + 8\,000 \cdot 0.08 + 8\,000 &= \\ &= 0.08 \sum_{n=0}^9 (80\,000 - n \cdot 8\,000) + 80\,000 = \\ &= 0.08 \cdot \frac{10}{2} (80\,000 + 8\,000) + 80\,000 = 35\,200 + 80\,000 \end{aligned}$$

17.

a) $\frac{11\,000}{10\,000} = 1.1, \frac{12\,100}{11\,000} = 1.1 \Rightarrow$ geometrisk serie

b) Nej

c) $\frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ geometrisk serie

d) Aritmetisk talföljd med $d = 11$

18. Antalet insättningar blir 28. Den första insättningen har genererat $1000 \cdot 1.03^{28}$ kr, den andra $1000 \cdot 1.03^{27}$ kr dvs totalt:

$$\sum_{i=1}^{28} 1000 \cdot 1.03^{28-i} = 1000 \cdot \frac{1.03^{29} - 1}{1.03 - 1} \approx 45\,200 \text{ kr}$$

19. $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \Rightarrow$ och $a_0 = 1$ ger med hjälp av excel:

n	rot(1+a _n)
0	1,000000
1	1,414214
2	1,553774
3	1,598053
4	1,611848
5	1,616121
6	1,617443
7	1,617851
8	1,617978
9	1,618017
10	1,618029
11	1,618032
12	1,618033
13	1,618034
14	1,618034

20. Visa först att uttrycket gäller då $n = 1$ dvs:

$$\sum_{i=1}^1 \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2} \text{ OK}$$

Låt sedan summan gå till $n + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{2^i} &= \sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2(n+2)}{2 \cdot 2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \\ &= 2 - \frac{2(n+2) - n - 1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(n+1) + 2}{2^{n+1}} \text{ VSV} \end{aligned}$$

Enligt induktionsaxiomet gäller uttrycket för alla positiva heltal n .

Blandade uppgifter 2

1.

101	103	107	109	113
127	131	137	139	149
151	157	163	167	173
179	181	191	193	197
199				

2. Bara 1287. För att $1 + 2 + 8 + 7 = 18$ är delbart med 3.

28. Visa att $2^{n-1} \leq n!$. Testa med t.ex. $n = 1$, $2^0 \leq 0! = 1$ OK.

Kolla $n + 1$ dvs $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \leq 2 \cdot n! \leq (n + 1)!$ VSB

Enligt induktionsaxiomet gäller då uttrycket för alla n .

29. a)

$$13^3 - 13 = (12 + 1)^3 - 13 = 12^3 + 3 \cdot 12^2 + 3 \cdot 12 + 1 - 13 = 12^3 + 3 \cdot 12^2 + 3 \cdot 12 - 12 \text{ VSB}$$

b)

$$5876332^3(\text{mod}6) - 5876332(\text{mod}6) = 4^3(\text{mod}6) - 4(\text{mod}6) = 4(\text{mod}6) - 4(\text{mod}6) = 0$$

c) $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1) \Rightarrow$ för alla n

30.

$$\begin{cases} a = 4 + k \\ am = 4 + 2k \\ am^2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 + k \\ am = 4 + 2k \\ a^2m^2 = 18a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 + k \\ a^2m^2 = (4 + 2k)^2 \Rightarrow 18(4 + k) = (4 + 2k)^2 \\ a^2m^2 = 18a \end{cases}$$

$$\Rightarrow 72 + 18k = 16 + 16k + 4k^2 \Rightarrow 0 = -56 - 2k + 4k^2 \Rightarrow k^2 - \frac{1}{2}k - 14 = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 14} = \frac{1}{4} \pm \frac{15}{4} = \begin{cases} k_1 = 4 \\ k_2 = -3.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 8 \\ a_2 = 0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 1.5 \\ m_2 = -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ y_1 = 12 \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} x_1 = 0.5 \\ y_1 = -3 \end{cases}$$

31. $a_0, a_1, a_2, \dots, a_7 = \{a + (i - 1)k\} = a, a + k, a + 2k, \dots, a + 6k$

$$\begin{cases} a + a + 6k = 40 \\ a \cdot (a + 6k) = 160 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 3k = 20 \\ a \cdot (a + 3k) = 160 \end{cases} \Rightarrow a \cdot 20 = 160 \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ k = 4 \end{cases}$$

Talföljden blir: 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36

32. Gäller för $n = 1$,

$$n + 1 \Rightarrow 1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{3(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} \text{ VSB}$$

33. Gäller för $n = 1$,

$$n + 1 \Rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \text{ VSB}$$

34.

$$Dx^n = \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \text{ gäller då } n = 1$$

$$\begin{aligned}
 n + 1 \Rightarrow \frac{d}{dx} x^{n+1} &= \frac{d}{dx} (x \cdot x^n) = \{\text{derivatan av en produkt}\} = x \cdot \frac{d}{dx} x^n + x^n \frac{d}{dx} x = \\
 &= x \cdot nx^{n-1} + x^n = nx^n + x^n = (n + 1)x^n \text{ VSB}
 \end{aligned}$$

35.

36. a) Uttrycket gäller för $n = 1$.

$$a^{n+1} - b^{n+1} = a \cdot a^n - b \cdot b^n = a \cdot a^n - a \cdot b^n + a \cdot b^n - b \cdot b^n = a \cdot (a^n - b^n) + (a - b) \cdot b^n$$

b) Gäller för $n = 1$,

$$a^{2(n+1)} - b^{2(n+1)} = a^2 a^{2n} - b^2 b^{2n} = a^2 a^{2n} - \underbrace{a^2 \cdot b^{2n} + a^2 \cdot b^{2n}}_{=0} - b^2 b^{2n} = a^2 (a^{2n} - b^{2n}) + (a^2 - b^2) b^{2n}$$