Valda uppgifter i kursboken Matematik M3c av Sjunnesson med flera utgiven på Liber, (2012).

3114. Skriv om linjerna på formen $y = kx + m$, dvs $3y = -2x + 9 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 3$ och $y = \frac{p(p-2)}{2}x$. För att linjerna skall vara vinkelräta krävs att $k_1 k_2 = -1$ dvs $\frac{p(p-2)}{2}\frac{2}{3} = 1 \Rightarrow$

$$p^2 - 2p - 3 = 0 \Rightarrow p = 1 \pm \sqrt{1^2 + 3} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

3115. Från punkten $(-1, -5)$ till punkten $(4, f(4))$ är det 5 steg längs x-axeln. Alltså:

$$f_{\min}(4) = -5 + 5 \cdot 2 = 5 \text{ och } f_{\max}(4) = -5 + 5 \cdot 3 = 10$$

3128. a) $v(7) \approx \frac{38-21}{2} = 8.5 \text{ m/s}$

b)

Tid (s)	Sträcka (m)	$a = \frac{s}{t^2}$
6	21	0.58
8	38	0.59
10	60	0.6

$$\frac{s(7.1) - s(6.9)}{0.2} = \frac{a7.1^2 - a6.9^2}{0.2} \approx 8.3 \text{ m/s}$$

3129. $f(x) = 4x - x^2 = x(4 - x)$ dvs vertex i $x = 2$.

a) Om a ligger längre bort än 1 l.e. till höger om vertex blir $k < 0$. Dvs då $x > 3$.

b) $a = 3$

c)

$$-2 = \frac{f(a) - 3}{a - 1} = \frac{4a - a^2 - 3}{a - 1} \Rightarrow 2 - 2a = 4a - a^2 - 3 \Rightarrow$$

$$a^2 - 6a + 5 = 0 \Rightarrow a = 3 \pm \sqrt{3^2 - 5} = \begin{cases} 1 \text{ falsk} \\ 5 \end{cases}$$

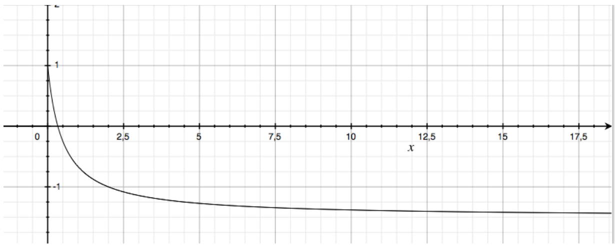
3141. $f(2) = 5 \ \Rightarrow \ f_{\max}(10) = f(2) + 8 \cdot 2 = 21$

$$f_{\min}(10) = f(2) + 8 \cdot (-1) = -3 \text{ dvs } -3 \leq f(10) \leq 21$$

3142. a) $f(2.1) \approx f(2) + 0.1 f'(2) = 3 + 0.1 \cdot 4 = 3.4$

b) $g(6.8) \approx f(7) - 0.2 \cdot f'(7) = -2 - 0.2(-3) = -1.4$

3154. a)



b)

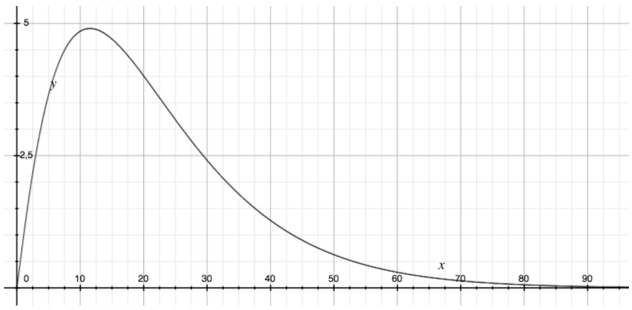
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x-3x^2}{2x^2+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-3}{2+\frac{x}{x^2}}=-\frac{3}{2}$$

3155.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{x}-2x}{4x+\sqrt{x}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-2}{4+\frac{1}{\sqrt{x}}}=-\frac{1}{2}$$

3156. a)

$$y(x)=\frac{x^{1.1}}{1.1^x}$$



b) Värdet ser ut att närma sig 0. Det finns en regel som säger att en exponentialfunktion växer snabbare än varje potens, till sist.

3207. a)

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{6(x+h)^2-6x^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{6x^2+12xh+6h^2-6x^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{12xh+6h^2}{h}=\lim_{h\to0}(12x+6h)=12x$$

b)

$$\lim_{h\to0}\frac{3(x+h)-3x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{3h}{h}=3$$

c)

$$\lim_{h\to0}\frac{6(x+h)^2+3(x+h)+7-6x^2-3x-7}{h}=$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6x^2 + 12xh + 6h^2 + 3x + 3h + 7 - 6x^2 - 3x - 7}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{12xh + 6h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \to 0} (12x + 6h + 3) = 12x + 3$$

d) $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$

3225. Sekanten har k-värdet$=2$. Det som man skall hitta är den punkt på kurvan som har derivatan $= 2$.

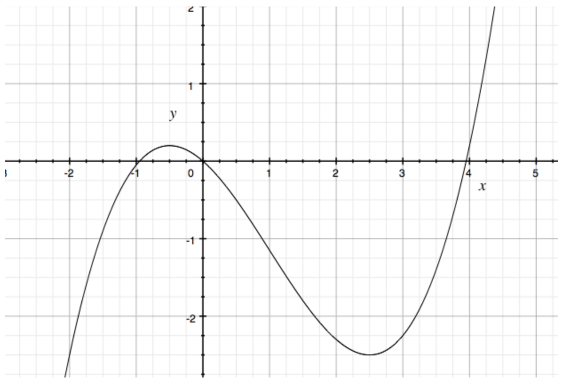
$$4x - 6 = 2 \Rightarrow x = 2$$

3237. Avståndet mellan löparna kan uttryckas som $f(t) - g(t) = t - 0.2t^2$. Derivatan av avståndet blir $1 - 0.4t$ Derivatan har ett nollställe då $t = 2.5$. Avståndet är då som störst:

$$2.5 - 0.2 \cdot 2.5^2 = 1.25 \text{ m}$$

3307. $f(x) = 0.2x^3 - 0.6x^2 - 0.75x \Rightarrow f'(x) = 0.6x^2 - 1.2x - 0.75 = 0$ då

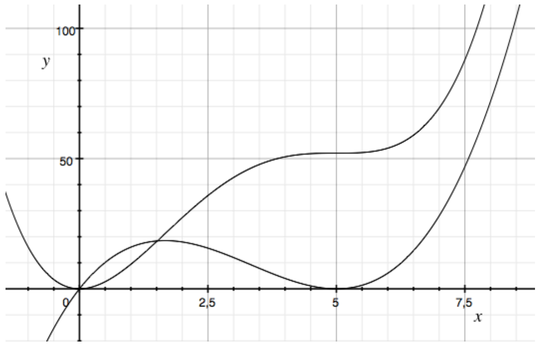
$$x^2 - 2x - 1.25 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1 + 1.25} = \begin{cases} 2.5 \\ -0.5 \end{cases}$$



3316. $f'(x) = x \cdot (x - a)^2 = x(x^2 - 2ax + a^2) = x^3 - 2ax^2 + xa^2 \Rightarrow$

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}x^2a^2 + C$$

För $a = 5$ och $C = 0$ finns funktionen och derivatan i figuren nedan.

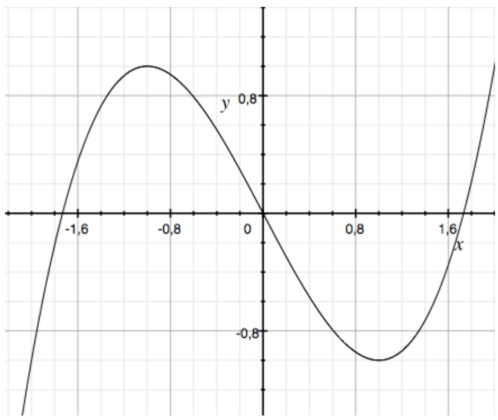


100
y
50
0
2,5
5
7,5
x

3317. $f(x) = ax^3 + bx \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + b$. Villkoren ger:

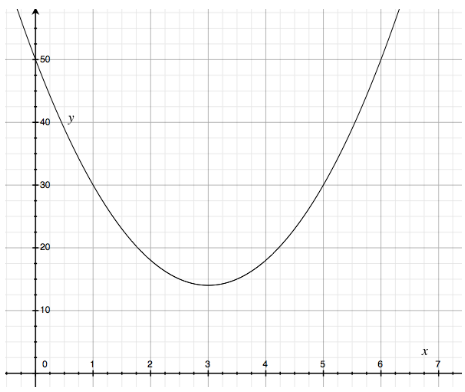
$$\begin{cases} f(1) = -1 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Dvs: $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 3x)$



3318. $y(x) = ax^2 + bx + 50 \Rightarrow y'(x) = 2ax + b$ Villkoren ger:

$$\begin{cases} y(3) = 14 \\ y'(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a + 3b + 50 = 14 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -24 \end{cases}$$



3327.

$$f(x) = ax^2 + 3x - 2 \Rightarrow f'(x) = 2ax + 3 \Rightarrow f'(3) = 6a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

3328. $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b = 0 \Rightarrow b = 0$

För att det skall bli en maxpunkt på positiva *y*-axeln måste $a < 0$ och $c > 0$.

3340.

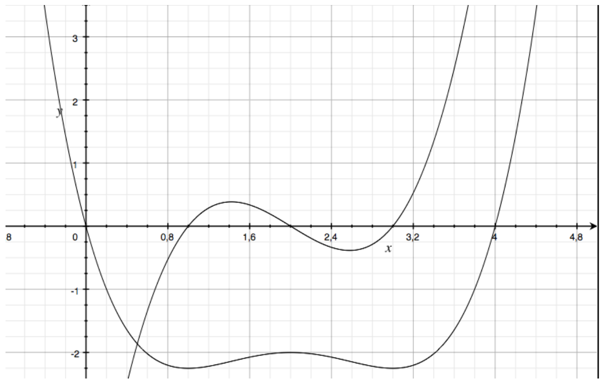
$$f(x) = x^3 - 12x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 \text{ dvs kurva c)}$$

3341. I min och maxpunkter är derivatan = 0. I en maxpunkt byter derivatan tecken från + till – och i en minpunkt tvärtom. Detta gäller kurva d).

3342.

$$f'(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) = a = a(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \Rightarrow$$

$$f(x) = a\left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x + C\right)$$



3343.

$$8x - 2y = 16 \Leftrightarrow y = 4x - 8 \text{ dvs } k = 4$$

$$f'(x) = (x-1)^2 = 4 \text{ när } x_1 = -1 \text{ och } x_2 = 3$$

3351. a)

$$s(t) = 0.5t^2 - 0.06t^3, v(t) = s'(t) = t - 0.18t^2 = 0 \text{ då } \begin{cases} t_1 = 0 \text{ s} \\ t_2 = \dfrac{1}{0.18} \approx 5.6 \text{ s} \end{cases}$$

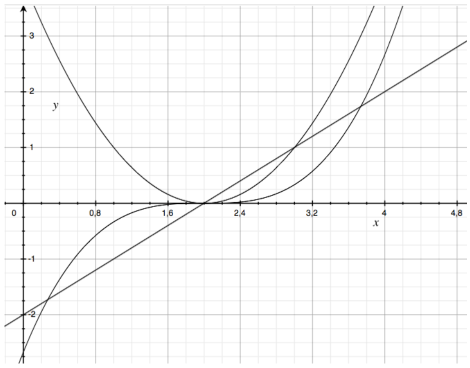
$$s\left(\frac{1}{0.18}\right) = 0.5\left(\frac{1}{0.18}\right)^2 - 0.06\left(\frac{1}{0.18}\right)^3 \approx 5.1 \text{ m}$$

b)

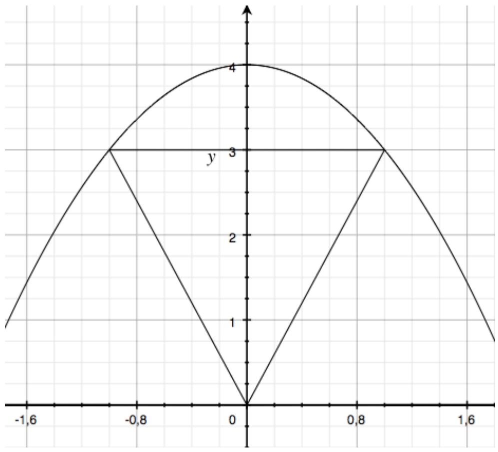
$$s''(t) = 1 - 0.36t \Rightarrow s''(0) = 1 \text{ m/s}^2$$

3352.

$$f'(x) = (x-2)^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^3 + C \text{ och } f''(x) = x - 2$$



3365.

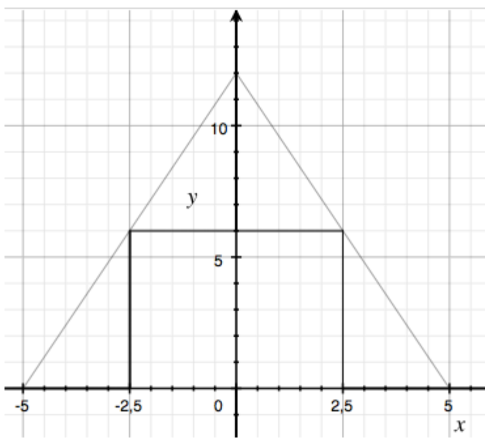


Triangelns area kan tecknas som:

$$A = \frac{1}{2} 2x \cdot (4 - x^2) = 4x - x^3 \Rightarrow A'(x) = 4 - 3x^2 = 0 \text{ då } x = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1.15$$

$$A_{max} = 4\sqrt{\frac{4}{3}} - \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8}{3} \approx 3.1 \text{ a. e.}$$

3366.



Rektangelns area kan tecknas som:

$$A = 2x \cdot 12\left(1 - \frac{x}{5}\right) = 24\left(x - \frac{x^2}{5}\right) \Rightarrow A'(x) = 24\left(1 - \frac{2x}{5}\right) = 0 \text{ då } x = \frac{5}{2}$$

$$A_{max} = 24\left(\frac{5}{2} - \frac{25}{4 \cdot 5}\right) = 30 \text{ cm}^2$$

3367. Låt radien på cylindern vara *r* och höjden *h*. Total åtgång av plåt blir:

$$A(r,h) = \pi r^2 + \frac{1}{2}4\pi r^2 + 2\pi rh = 3\pi r^2 + 2\pi rh = 70 \Rightarrow h = \frac{70 - 3\pi r^2}{2\pi r}$$

$$V(r,h) = \pi r^2 h + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2 \frac{70 - 3\pi r^2}{2\pi r} + \frac{2}{3}\pi r^3 = r\frac{70 - 3\pi r^2}{2} + \frac{2}{3}\pi r^3 =$$

$$= \frac{70r - 3\pi r^3}{2} + \frac{2}{3}\pi r^3 = 35r - \frac{5}{6}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 35 - \frac{5}{2}\pi r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{14}{\pi}$$

Golvarea vid maximal volym:

$$A_{\text{vid max volym}} = \pi r^2 = \pi \frac{14}{\pi} = 14 \text{ m}^2$$

3405. a)

$$\frac{1}{2 + \sqrt{x}} = \frac{2 - \sqrt{x}}{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} = \frac{2 - \sqrt{x}}{4 - x}$$

b)

$$\frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

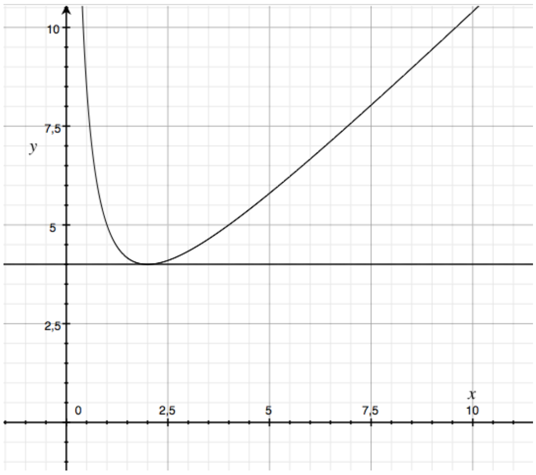
3416. $f(x) = 8\sqrt{x} = 8x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 8\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow x = 16$

Då $x = 16$ lutar kurvan med $k = 1$.

3417.

$$y(x) = x + \frac{4}{x} \Rightarrow y'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} \text{ men } y(2) = 4 \text{ och } y'(2) = 0$$

Tangenten beskrivs av linjen $y = 4$.



3418. a) $f'(t) = 4t^3$

b) $f'(t) = 3$

c) $f'(t) = v_0 + at$

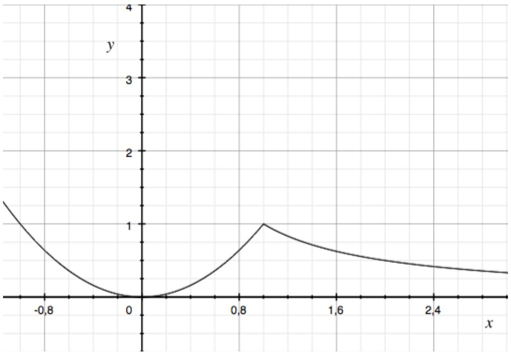
3419.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 - (x+h)^2}{h(x+h)^2 x^2} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 - x^2 - 2xh - h^2}{h(x+h)^2 x^2} = \lim_{h \to 0} \frac{-2x - h}{(x+h)^2 x^2} = \lim_{h \to 0} \frac{-2x - h}{(x+h)^2 x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

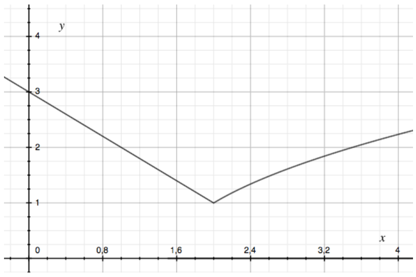
3425. a)

$$1^2 + C = \frac{1}{1} \Rightarrow C = 0$$



b)

$$5C - 2 = \sqrt{4 - 5C} \Rightarrow 25C^2 - 20C + 4 = 4 - 5C \Rightarrow 25C^2 = 15C \Rightarrow C = 0.6$$



Test 3

1. a)

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x\to 5} \frac{(x+5)(x-5)}{x-5} = \lim_{x\to 5} x + 5 = 10$$

b)

$$\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6 + h) = 6$$

c)

$$\lim_{x\to \infty} \frac{20 + 0.98^x}{5} = 4$$

2. a)

$$y = x^5 - 4x^3 + 9x - 4 \Rightarrow y' = 5x^4 - 12x^2 + 9$$

b)

$$y = (5x - 1)(5x + 1) = 25x^2 - 1 \Rightarrow y' = 50x$$

3. a)

b)

$$f(x) = 3x^3 - x^2 \Rightarrow f'(x) = 9x^2 - 2x \Rightarrow f'(4) = 9 \cdot 16 - 8 = 136$$

c)

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \Rightarrow f'(4) = \frac{4}{2} - \frac{16}{2} = -6$$

$$f(x) = 3x - 7 \Rightarrow f'(x) = 3 \Rightarrow f'(4) = 3$$

4. a) $f(0) = 3$ b) $f(2) = 1$ c) $f'(1) = 0$

d) $f'(2) \approx 3$ e) $f'(x) > 0$ då $1 < x < 3$

5. a) $f(x) = 5x^7 - 3x^4 + 10^2 \Rightarrow f'(x) = 35x^6 - 12x^3$

b) $g(x) = -0.5x^4 + 4x^2 - 5x + c^3 \Rightarrow g'(x) = -2x^3 + 8x - 5$

c) $h(u) = 8\sqrt{u} - u^{-2} + 2u^{1.3} \Rightarrow h'(u) = \frac{4}{\sqrt{u}} + 2u^{-3} + 2.6u^{0.3}$

6. $y(x) = x^3 - 6x + 2 \Rightarrow y'(x) = 3x^2 - 6 \Rightarrow y'(1) = -3$ punkten $(1, -3) \Rightarrow y = -3x$

7.

$$\lim_{h \to 0} \frac{3(1+h)^2 - 3 \cdot 1^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 + 6h + 3h^2 - 3}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + 3h) = 6$$

8. Punkterna är $(1, 5)$ och $(3, 9) \Rightarrow k = 2, f'(x) = 6 - 2x = 2 \Rightarrow x = 2, y = 8$

dvs $y = 4 + 2x$

9. $s(t) = 3t^2 + 5t \Rightarrow s'(t) = 6t + 5 \Rightarrow s(2) = 22$ m och $s'(2) = 17$ m/s

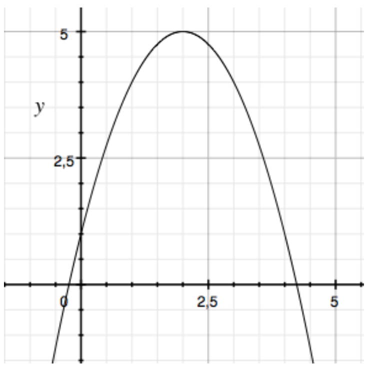
Efter 2 sekunder har föremålet rört sig 22 m och har hastigheten 17 m/s.

10. a) $f(x) = x^{99} \Rightarrow f'(x) = 99x^{98} \Rightarrow f'(-1) = 99$

b) $f(x) = (x - 3)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x - 3) \Rightarrow f'(-1) = -8$

c) $f(x) = 7x \Rightarrow f'(x) = 7 \Rightarrow f'(-1) = 7$

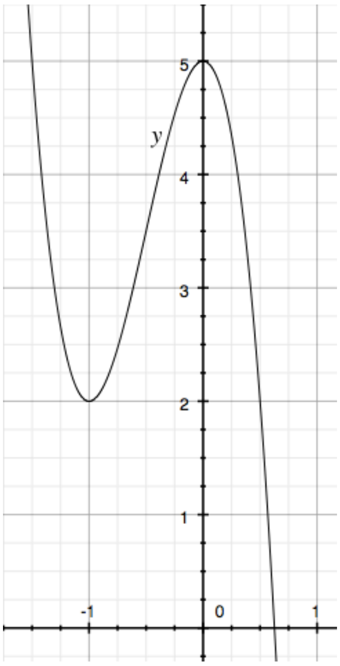
11. till exempel $g(x) = -x^2 + 4x + 1 \Rightarrow g'(x) = -2x + 4$



12.

$$y = ax^3 - 9x^2 + 5 \Rightarrow y' = 3ax^2 - 18x, y'(-1) = 3a + 18 = 0 \Rightarrow a = -6$$

$$y = -6x^3 - 9x^2 + 5, \text{växande då } -1 \le x \le 0$$



13. En inflexionspunkt betyder att funktionen stiger för $x < 5$ och för $x > 5$. Derivatan är alltså positiv utom då $x = 5$ då är $g'(x) = 0 \Rightarrow$ är $g''(5) = 0$.

14. a) Då $x = 0$ och $x = 3$.

b) När $x > 3$.

c) Då $x < 3$.

d) När $x = 0$ och $x = 3$.

15. $h''(x) = 6x \Rightarrow h'(x) = 3x^2 + C_1 \Rightarrow h(x) = x^3 + C_1x + C_2$

16. $y'(x) = (x-2)^2 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{3}(x-2)^3 + C$

17. $s(t) = 20t - 5t^2 \Rightarrow s'(t) = 20 - 10t$

a) $s'(1.5) = 5$ m/s

b) $s(3) = 20 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 15$ m

c) $s'(t) = 20 - 10t = 0 \Rightarrow t = 2$ s

d) $s(2) = 20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 20$ m

18. a)

b)

$$V(p) = 50\,000p - 20p^2 - 80\,000 \Rightarrow V'(p) = 50\,000 - 40p = 0 \Rightarrow p = 1\,250 \text{ kr}$$

$$V(1\,250) \approx 31 \text{ miljoner kr}$$

19.

$$m(t) = 4.5 \cdot t^{0.25} \Rightarrow m'(t) = 1.125 \cdot t^{-0.75} \Rightarrow m'(10) \approx 0.2 \text{ kg/min}$$

Ismassan växer med 0.2 kg/min vid tiden 10 minuter.

20. a)

$$y = \frac{x(14 - x)}{2}$$

b) $0 < x < 14$

c)

$$y = \frac{x(14 - x)}{2} = \frac{1}{2}(14x - x^2) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}(14 - 2x) = 0, x = 7$$

$$y_{max} = \frac{7(14 - 7)}{2} = 24.5 \text{ cm}^2$$

21. a)

$$A(x) = x \cdot (-0.5x + 4) \text{ a. e.}$$

b) $0 < x < 8$

c)

$$A(x) = -0.5x^2 + 4x \Rightarrow A'(x) = -x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$A(4) = 4 \cdot (-0.5 \cdot 4 + 4) = 8 \text{ a. e.}$$

22.

$$y = 8x - x^2 \Rightarrow y' = 8 - 2x = -2 \Rightarrow x = 5$$

$$y(5) = 8 \cdot 5 - 5^2 = 15 \Rightarrow (5, 15)$$

23.

$$N(x) = 40\,000 + 1\,000x + 200x^2$$

a)

$$N(3) = 40\,000 + 1\,000 \cdot 3 + 200 \cdot 3^2 = 44\,800 \text{ st}$$

b)

$$N(5) = 40\,000 + 1\,000 \cdot 5 + 200 \cdot 5^2 = 50\,000 \text{ st}$$

Ökning cirka 5 000 st.

c) Ökningen klockan 12 är:

$$N'(x) = 1\,000 + 400x, N'(3) = 1\,000 + 400 \cdot 3 = 2\,200 \text{ st/timme}$$

24.

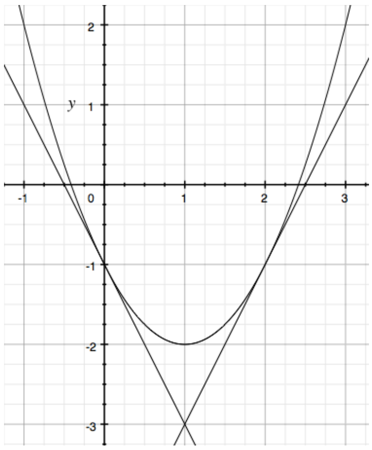
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{för } x \leq 4 \\ x + C & \text{för } x > 4 \end{cases} \Rightarrow C = 12$$

25.

$$y = x^2 - 2x - 1 \Rightarrow y' = 2x - 2$$

Den ena linjen går genom (0, -1) och lutar $k = -2, y_1$.
Den andra går genom (2, -1) och lutar $k = 2, y_2 = -5 + 2x$.

$$-1 - 2x = -5 + 2x \Rightarrow x = 1, y = -3$$



26.

$$V(r) = \pi r^2(6.4 - r) = \pi(6.4r^2 - r^3) \Rightarrow V'(r) = \pi(12.8r - 3r^2) = 0$$

$$r = \frac{12.8}{3} \approx 4.3 \text{ cm} \Rightarrow V_{max}\left(\frac{12.8}{3}\right) = \pi r^2(6.4 - r) \approx 122 \text{ cm}^3$$

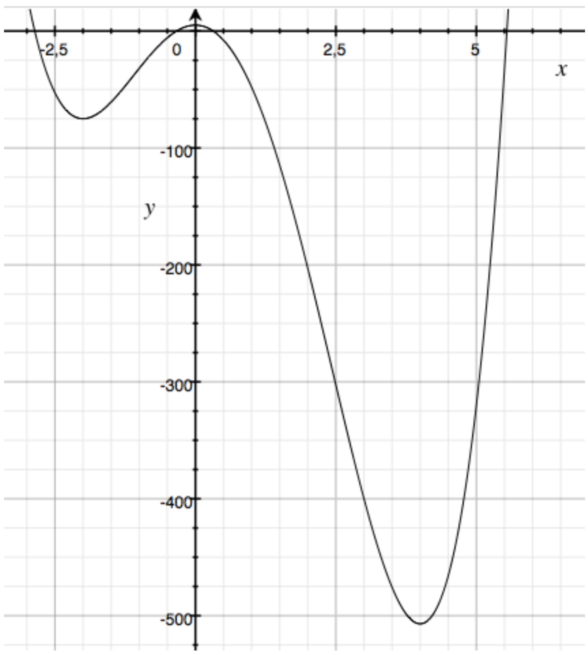
27.

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 48x^2 + 5 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 96x = 12x(x^2 - 2x - 8) = 0$$
$$f'(x) = 12x(x-4)(x+2)$$

Största värde finns i gränsen $x = -3$. Minsta värdet i $x = 4$.

$$f(-3) = 3(-3)^4 - 8(-3)^3 - 48(-3)^2 + 5 = 32$$

$$f(4) = 3(4)^4 - 8(4)^3 - 48(4)^2 + 5 = -507$$



28. a)

$$f(x) = x^4 + 5$$

b)

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(3) = 4 \cdot 3^3 = 108$$

Punkten är $(3, 86) \Rightarrow y = -238 + 108x$

Blandade uppgifter

1. a) $y(5) = 3 \cdot 5^2 = 75°\,\mathrm{C}$

b) $\Delta y = y(5.1) - y(4.9) = 3(5.1^2 - 4.9^2) = 6°\,\mathrm{C}$

c) Den genomsnittliga temperaturförändringen vid 5 minuter är:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{0.2} = 30\ °\mathrm{C/minut}$$

2. a) $f'(x) = 32x^7 - 20x^3 + 17$

b) $g'(t) = -2x^3 + 6x - 7$

c) fel variabel i uppgiften $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 8x^{-5} + 3.4x^{0.7}$

3. a) $f'(0) = 2$

b) $f'(2) = 0$

c) $f'(4) = -2$

4. Växande (men inte strikt växande) för $x \leq 2$ och $x \geq 7$. Avtagande då $2 < x < 7$.

5. Terrasspunkt i $(-3, 4)$, lokalt max i $(2, 9)$ och lokalt min i $(7, 1)$.

6. a) $y(x) = 2x^4 - x^2 \Rightarrow y'(x) = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1) = 2x(2x+1)(2x-1)$

Ett teckenschema visar:

	-1	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	1
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$y'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
riktning	$\searrow$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$	0	$\nearrow$

$$x = -0.5 \text{ minpunkt}, x = 0 \text{ maxpunkt}, x = 0.5 \text{ minpunkt}$$

b) $y(x) = 3x^2 \Rightarrow y'(x) = 6x \Rightarrow y''(x) = 6 > 0 \Rightarrow$ minpunkt

c) $y(x) = x^3 \Rightarrow y'(x) = 3x^2$

Ett teckenschema visar:

	-1	0	1
$y'(x)$	$+$	0	$+$
riktning	$\nearrow$	0	$\nearrow$

Dvs terrasspunkt.

d) $y(x) = x^4 - x \Rightarrow y'(x) = 4x^3 - 1 = 0$ då $x = 4^{-3} = \frac{1}{64}$

Ett teckenschema visar:

	0	4^{-3}	1
$y'(x)$	$-$	0	$+$
riktning	↘	0	↗

$(0, 0)$ är inget lokalt max eller min. Minpunkten finns i $(4^{-3}, -0.02)$

7. $N(t) = 2t^3 + 50$

a) $N(5) = 2 \cdot 5^3 + 50 = 300$ bakterier

b) $\frac{dN(t)}{dt} = 6t^2 \frac{\text{bakterier}}{\text{minut}}$ dvs $\frac{dN(1)}{dt} = 6$ bakterier/minut

c) $\frac{dN(5)}{dt} = 150 \frac{\text{bakterier}}{\text{minut}}$

8. a) $y = 0$ i punkterna B och E.

b) $y'(x) = 0$ i punkterna C och F.

c) $y'(x) < 0$ i punkterna A och B.

9. a) $y(x) = 12x - x^3 \Rightarrow y'(x) = 12 - 3x^2 = 0$ då $x = \pm 2$

Ett teckenschema visar:

	-3	-2	0	2	-3
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
riktning	↘	→	↗	→	↘

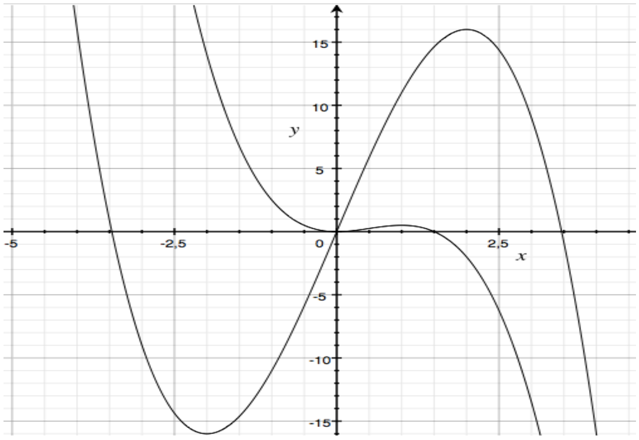
$x = -2$ ger ett lokalt minimum $(-2, -16)$ och $x = 2$ ger ett lokalt maximum $(2, 16)$

b) $y(x) = 1.5x^2 - x^3 \Rightarrow y'(x) = 3x - 3x^2 = 3x(1 - x)$

Ett teckenschema visar:

	-1	0	0.5	1	2
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
riktning	↘	→	↗	→	↘

$(0,0)$ är ett lokalt minimum, $(1, 0.5)$ är ett lokalt maximum



10. $y(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x \Rightarrow y'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ och $y'(-1) = -2$
Vilket betyder att $y(x)$ är avtagande då $x = -1$.

11. a) $g(1) = 3$ läses direkt i figuren

b) I punkten $(2, 4)$ finns en maxpunkt dvs $g'(2) = 0$.

c) Funktionen är strikt växande då $x < 2$.

d) $g'(x) < 0$ då funktionen är avtagande dvs då $x > 2$.

e) $g(x) = 0$ då $x = 0$ och då $x = 4$.

12. a) $f(x) = 12x - x^3 \Rightarrow f'(x) = 12 - 3x^2$ dvs $f'(x) = 0$ då $x = \pm 2$.

b)

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-6)}{2} = \frac{1}{2}(x^2 - 4x - 12) \Rightarrow f'(x) = x - 2 = 0 \text{ då } x = 2$$

13. a) $f'(x) = 0$ då $x = 0$ och då $x = 4$.

b) $f(x)$ är strikt växande då $f'(x) > 0$ dvs då $0 < x < 4$.

14. a)

b) $g(2.1) \approx g(2) + k \cdot 0.1 = 3 + (-1) \cdot 0.1 = 2.9$

15. a) $g(-1) = 2$ läses direkt i figuren.

b) Linjens lutning verkar ha $k = -2$ dvs $g'(0) = -2$.

c) Vid $x = 1$ finns en minpunkt dvs $g'(1) = 0$.

16.$s(t) = 2t^2 - 12t + 25 \Rightarrow s'(t) = 4t - 12 = 0$ då $t = 3$

Gör en värdetabell där intervallets gränser och $t = 3$ ingår.

t	$s(t)$
2	9
3	7
5	15

Det största värdet är 15, det minsta 7.

17.$f(x) = 3x^2 - ax \Rightarrow f'(x) = 6x - a, f'(2) = 6 \cdot 2 - a = -1 \Rightarrow a = 13$

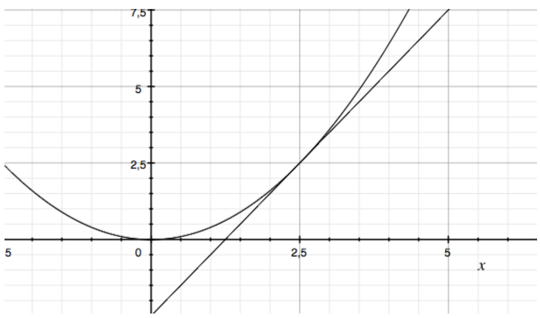
18. $s(t) = t^3 - 120t^2 \Rightarrow s'(t) = 3t^2 - 240t,\ \ s'(t) = 0$ då $3t(t - 80) = 0$

Gör en värdetabell där intervallets gränser och $t = 80$ ingår.

t	$s(t)$
0	0
80	$-256\,000$
100	$-200\,000$

Svar: Det största värdet är 0 och det minsta är$-256\,000$.

19. $y(x) = 0.4x^2 \Rightarrow y'(x) = 0.8x, k = y'(2.5) = 2$ och punkten är $(2.5,\ 2.5)$ det ger linjen $y = 2x - 2.5$ som skär x-axeln i punkten $(1.25, 0)$.



20. a) $g'(x) = 0$ i punkterna B, D och F.

b) $g'(x) < 0$ i punkterna A och E.

c) Ja, $g(x)$ avtar då $g'(x) < 0$ i punkten A.

21. $f(x) = ax^3 + x \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 1, f'(2) = 3a \cdot 4 + 1 = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

22. $y(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \Rightarrow y'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2$

Dvs en terrasspunkt då $x = 1$, och dess koordinater är $(1, 1)$.

23. a) Klockan 23 är vattendjupet 2.3 m.

b) Klockan 23 stiger vattennivån med hastigheten 20 cm/timme.

c) Klockan 02:00 är vattendjupet 4 m men det stiger inte. När $y'' < 0$ byter y' tecken från $+$ till $-$, dvs en maxpunkt.

24. $y(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2 \Rightarrow y'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$

Terrasspunkten finns där derivatan har ett dubbelt nollställe dvs då $x = 0$. Punkten är $(0, 2)$.

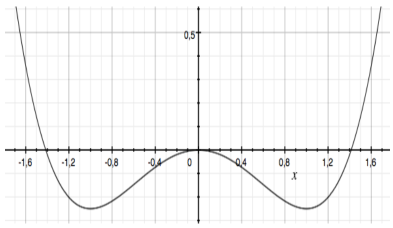
25.

$$y(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \Rightarrow y'(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$$

Gör ett teckenschema:

	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
produkt	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
riktning	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

Svar: Fallande då $x < -1$, och då $0 < x < 1$ och växande då $-1 < x < 0$ och då $x > 1$.



26. $y(x) = x^3 - 12x \Rightarrow y'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ då $x = \pm 2$
Punkterna är $(-2, 16)$ och $(2, -16)$ dvs linjen blir $y = -8x$.

27. $6x + y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3 - 6x$ och $y(x) = x^2 - 4x - 8 \Rightarrow y'(x) = 2x - 4$

$$2x - 4 = -6 \text{ då } x = -1 \text{ dvs i punkten } (-1, -3)$$

28. a) När tillflödet varit längs tid dvs B.
b) Utflödet är störst i punkten C.
c) När utflödet pågått längst tid dvs D.
d) Högsta antal l/min dvs A.

29. $h(t) = 24t^2 - t^3 \Rightarrow h'(t) = 48t - 3t^2 = 3t(16 - t) = 0$ då $t = 0$ och då $t = 16$

Maximal höjd blir $h(16) = 16^2(24 - 16) = 2048$ m ≈ 2 km

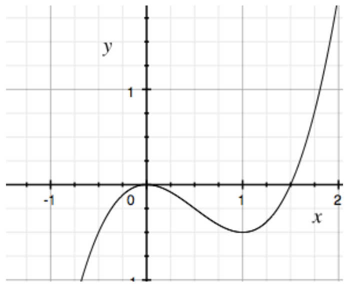
30. $y(x) = x^3 - 1.5x^2 \Rightarrow y'(x) = 3x^2 - 3x = 3x(x-1)$

Gör ett teckenschema:

	-1	0	0.5	1	2
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
produkt	$+$	0	$-$	0	$+$
riktning	↗	→	↘	→	↗

Vi ser att maxpunkten finns då $x = 0$ och dess koordinater är $(0{,}0)$.

Tangenten är linjen $y = 0$ den skär kurvan då $x^3 - 1.5x^2 = 0 \Rightarrow x = 1.5$ dvs i $(1.5,\ 0)$.



31.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2-4^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{16+8h+h^2-16}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(8+h)}{h} = 8$$

Derivatan av x^2 i punkten $x = 4$.

32. Kurvan kan skrivas som $f(x) = k(x-1)(x-2)$ där $k = 1.5$.

$$f(x) = 1.5x^2 - 4.5x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x - 4.5 \text{ dvs } f'(0) = -4.5$$

Tangentens ekvation är $y = 3 - 4.5x$ vilken skär x-axeln i punkten $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

33. Kalla rektangelns sidor a och b, då gäller: $2a + b = 28$ och arean $A(a)$

$$A(a) = ab = a(28-2a) \text{ och } \frac{dA(a)}{da} = 28 - 4a = 0 \text{ då } a = 7 \Rightarrow \ A_{max} = 98 \text{ m}^2$$

34. $y'(x) = 3ax^2 + b = 0$ då $x = 1$ dvs $b = -3a$

$$a - 3a + 10 = -8 \Rightarrow a = 9 \text{ och } b = -27$$

35. Låt behållarens bottensida vara b, då gäller:

$$b^2h = 27 \text{ och } k(b) = 500b^2 + 200\cdot 4hb = 500b^2 + 27\frac{800}{b} \Rightarrow$$

$$\frac{dk(b)}{db} = 1000b - 27\frac{800}{b^2} = 0 \Rightarrow b = \sqrt[3]{27 \cdot 0.8} \approx 2.8 \text{ m}$$

$$k\left(\sqrt[3]{27 \cdot 0.8}\right) \approx 11\,600 \text{ kr}$$

36.

$$g(3) = 10, -1 \leq g'(x) \leq 1.2 \Rightarrow g(7) \geq 10 + 4(-1) = 6$$

37.

$$u(t) = at^2 + vt - \frac{c}{t} \Rightarrow \frac{du(t)}{dt} = 2at + v + \frac{c}{t^2} \Rightarrow \frac{d^2u(t)}{dt^2} = 2a - \frac{2c}{t^3}$$

38. Nollställena är $x = -4, x = 1$ och $x = 3$. *m* ligger mellan -4 och 1 dvs $m = -1.5$.

a) $y'(x) = 3x^2 - 13$ dvs $y'(-1.5) = -6.25$ och punkter $M = (-1.5,\ \ 28.125)$. Från *m* till linjen skär x-axeln är det sålunda: $28.125 - a \cdot 6.25 = 0 \Rightarrow a = 4.5$ steg i *x*-led.
$-1.5\ + 4.5 = 3$ VSV

b) $y'(2) = 3 \cdot 4 - 13 = -1$ och $y(2) = -6$ dvs linjen är $y_t(x) = 4 - x$
Ja, ty $y_t(-4) = 4 - (-4) = 0$

c) $y'(-0.5) = 3 \cdot (-0.5)^2 - 13 = -12.25$ och $y(-0.5) = 18.375$ och då

$$-12.25 \cdot 1.5 + 18.375 = 0$$

kommer tangenten att skära *x*-axeln i nollstället $x = 1$.

39. Ta ett mindre intervall än 0.2, till exempel 0.1:

$$y'(x) \approx \frac{\sqrt{3 \cdot 2.05} - \sqrt{3 \cdot 1.95}}{2.05 - 1.95}$$

40. a)

$$y(x) = \sqrt{x} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{dvs } y'(4) = \frac{1}{4} \Rightarrow k_{normal} = -4$$

Genom punkten $(2, 4) \Rightarrow y_{normal}(x) = 18 - 4x$

b) $y(x) = 0.2x^2 \Rightarrow y'(x) = 0.4x \Rightarrow k_{normal} = -\frac{2.5}{x}$ Tag en punkt $(h, 0.2h^2)$
Då blir normalen $\frac{-2.5}{h}$ och linjen $y - 0.2h^2 = -\frac{2.5}{h}(x - h) \Leftrightarrow y = -\frac{2.5}{h}x + 2.5 + 0.2h^2$

Den linjen skär *y*-axeln i punkten $(0, 2.5 + 0.2h^2)$. Om *h* går mot noll blir punkten $(0, 2.5)$.

41. Plåten som går åt kan tecknas som:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Där volymen $V = \pi r^2 h$ är konstant dvs $h = \frac{V}{\pi r^2}$.

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}$$

$$\frac{dA(r)}{dr} = 4\pi r - 2\frac{V}{r^2} = 0 \text{ då } 4\pi r = 2\frac{V}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{V}{2\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \approx 4 \text{ cm}, h \approx 8 \text{ cm}$$

42.

$$f(x) = x^3 + cx^2 + x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2cx + 1$$

En terrasspunkt kräver att derivatan bara har ett nollställe dvs $3x^2 + 2cx + 1$ är en jämn kvadrat.

$$3x^2 + 2cx + 1 = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}cx + \frac{1}{3}\right) = 3\left(x \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \text{ och } \frac{c}{3} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ dvs } c = \pm\sqrt{3}$$

43. a)

$$f(x) = x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(4) = 8$$

b)

$$\frac{f(4.05) - f(3.95)}{0.1} = 8$$

c)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x$$

44.

$$k(\alpha) = \frac{V_{cyl}}{V_{klot}} = \frac{b \cdot h}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{4\pi r^3}\pi r^2 \sin^2\alpha \;\; 2r\cos\alpha = \frac{3}{2}\sin^2\alpha \;\; \cos\alpha$$

$$k'(\alpha) = \frac{3}{2}(2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha) = 0$$

$$2\cos^2\alpha = \sin^2\alpha \Rightarrow \tan^2\alpha = 2 \Rightarrow \alpha \approx 55°$$

$$k_{max} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.58$$

Bonusmaterial

a) Den första, andra, tredje gruppen osv borde kunna väljas som:

$$\binom{18}{3}\binom{15}{3}\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3} =$$

$$= \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$= 3 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \approx 1.4 \cdot 10^{11}$$

olika sätt.

b) Alltså, av de 6 grupperna skall 4 innehålla ett ess. Detta borde kunna ske på:

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$$

olika sätt.

Delas svaret i a) med b) fås antalet möjliga gruppkonstellationer.