Matematik 5 svar till valda uppgifter i kapitel 1.

1111. Då p och q tillhör mängden hela tal och $q \neq 0$ blir X mängden av alla rationella tal.

1112.

$$x^2 + 5x + b = 0 \Rightarrow x = -2.5 \pm \sqrt{6.25 - b} \text{ dvs } b > 6.25$$

$$B = \{b \epsilon R: b > 6.25\}$$

1133.

	Inte Pizza	Pizza
Inte hamburgare	20	10
Hamburgare	20	50

1134. Totalt 2000. 80 har högt blodtryck. 80 % av 80 st =68 dricker alkohol.

	Lågt blodtryck	Högt blodtryck	Totalt
Inte alkohol	768	12	780
Alkohol	$0.6 \cdot 1920 = 1152$	$0.85 \cdot 80 = 68$	1220
Totalt	1920	80	

Av de som dricker alkohol har $\frac{68}{1220} \approx 5.6$ % högt blodtryck.

1213. De som finns kvar är 47 kort, två av dessa är ess.

$$P(2 \text{ ess på tre kort}) = \frac{2}{47} \cdot \frac{1}{46} \cdot 3 \approx 0.28\ \%$$

1301. $6 \cdot 5 \cdot 2 = 60$ olika sätt.

1302. $3^{13} = 1\,594\,323$ olika rader

1303. $(26 + 26)^4 \cdot 10^2 = 731\,161\,600$ olika koder

1304. Presentatörer: 1 eller 2 personer dvs 2 kombinationer
Illustration: ppt, OH eller tavlan dvs 3 kombinationer
Utvärdering: enkät eller diskussion dvs 2 olika sätt

Totalt $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ olika möjligheter

1305. $1 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4 + 12 + 24 + 24 = 64$ olika kombinationer

1306. $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 36$ olika skyltar.

1307. $5^7 = 78\,125$ olika sätt att välja väg.

1308. I de sju positionerna kan den första inte vara 0 (för då är inte talet 7-siffrigt). De andra positionerna kan innehålla 10 siffror eller 9 om inga treor skall förekomma dvs:

$$\frac{7 - \text{siffriga utan treor}}{\text{alla } 7 - \text{siffriga}} = \frac{8 \cdot 9^6}{9 \cdot 10^6} \approx 47\ \%$$

1338. 25 kulor totalt.

a)

$P_{\text{en av varje}} = \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} \cdot \frac{10}{23} \approx 0.0406$ i en given ordning.

Men alla ordningar gills dvs $6 \cdot P_{\text{en av varje}} \approx 0.2435$

b)

$$P_{\text{ingen blå}} = \frac{18}{25} \cdot \frac{17}{24} \cdot \frac{16}{23} \cdot \frac{15}{22} \approx 0.2419$$

1339. Klassen består av 30 elever, 12 flickor och 18 pojkar. Antalet gynnsamma fall delat med alla möjliga fall blir:

$$\frac{\binom{12}{5}}{\binom{30}{5}} = \frac{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5!}}{\frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{5!}} \approx 0.00556$$

1340. Det är 100 träd av varje sort. Antag att vi väljer ett träd. Chansen att nästa är av samma sort är cirka 0.2 enligt:

$$P(\text{alla olika sorter}) = 1 \cdot \frac{99}{499} \cdot \frac{98}{498} \cdot \frac{97}{497} \cdot \frac{96}{496} \approx 0.00147$$

1341.

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

1342. De 5 raderna med ettor skall väljas bland 13 rader och de 3 raderna med kryss bland de åter-stående 8 dvs:

$$\binom{13}{5} \cdot \binom{8}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 6 = 72072 \text{ rader}$$

1343. Det totala antalet golv som kan fås med tre färger är $3^{15} = 14348907$.

Antalet gynnsamma kombinationerna kan finnas som $\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5} = 756756$

Svar: sannolikheten är $\frac{\text{gynnsamma golv}}{\text{alla golv}} = \frac{756756}{14348907} \approx 0.0257$

1353.

$$(2x+5x^3)^8 = \cdots + \binom{8-a}{a}(2x)^{8-a}(5x^3)^a + \cdots \text{ där } (8-a)+3a = 10 \Rightarrow a = 1$$

$$\binom{8-1}{1}(2x)^{8-1}(5x^3)^1 = 8\cdot 2^7 \cdot x^7 \cdot 5x^3 = 40\cdot 128 \cdot x^{10} = 5120x^{10}$$

1354.

$$\left(5x^2 - \frac{2}{x}\right)^9 = \cdots + \binom{9}{b}(5x^2)^{9-b}\left(-\frac{2}{x}\right)^b + \cdots = \{2(9-b) - b = 0 \Rightarrow b = 6\} =$$

$$= \cdots + \binom{9}{6}(5x^2)^3\left(-\frac{2}{x}\right)^6 + \cdots = \cdots + \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}5^3x^6\frac{2^6}{x^6} + \cdots =$$

$$= \cdots + 672000 + \cdots$$

1355.

$$n = 4 \Rightarrow 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1\ \ \Rightarrow \sum \quad = 8 = 2^3 = 2^{n-1}$$

$$n = 5 \Rightarrow 1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1\ \ \Rightarrow \sum \quad = 16 = 2^4 = 2^{n-1}$$

1356.

$$(2+i)^6 = \binom{6}{0}2^6i^0 + \binom{6}{1}2^5i^1 + \binom{6}{2}2^4i^2 + \binom{6}{3}2^3i^3 + \binom{6}{4}2^2i^4 + \binom{6}{5}2i^5 + \binom{6}{6}i^6 =$$

$$= 2^6 + 6\cdot 32i - 15\cdot 16 - 20\cdot 8i + 15\cdot 4 + 6\cdot 2i - 1 =$$

$$= 64 - 240 + 60 - 1 + 6\cdot 32i - 20\cdot 8i + 6\cdot 2i = -117 + 44i$$

1357. Binomialutveckling ger direkt:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

1358.

a) $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$ b) $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{125}{216}$

c) $1 - \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{91}{216}$ d) $\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72}$

1359.

a) $(0.85)^3 \approx 0.614$ b) $\binom{3}{2}\cdot(0.15)^1\cdot(0.85)^2 \approx 0.325$

c) $1 - (0.15)^3 \approx 0.997$

1360.

a) $\binom{5}{3}0.9^3 \cdot 0.1^2 = \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}0.9^3 \cdot 0.1^2 = 0.0729$

b) $\binom{5}{4}0.9^4 \cdot 0.1^1 + 0.9^5 = 0.9185$

1361.

a) $\binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}\frac{1}{216}\frac{5^7}{6^7} \approx 0.155$

b) $P_{\text{max 3 ettor}} = P_{0\text{ ettor}} + P_{1\text{ etta}} + P_{2\text{ ettor}} + P_{3\text{ ettor}} =$

$$= \binom{10}{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^9 + \binom{10}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^8 + \binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0.9303$$

c) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0.8385$

1362.

a) $\binom{10}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 0.2276$

b) 1-(0 rätt+1 rätt+2 rätt+3 rätt)=0.441

c) $\binom{10}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{10} + \binom{10}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9\left(\frac{2}{3}\right)^1 \approx 0.0356\ \%$

1364. a) Binomialfördelningen för 8 försök ger för *k* klave:

$$\binom{8}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{8-k} = \binom{8}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

b)

$$\binom{8}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \binom{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^8} = 56\cdot\frac{1}{2^8} = \frac{7}{32} \approx 22\ \%$$

Test 1 sidan sid 56 ff

1. a) R (de reella talen) är en delmängd av C (de komplexa talen): SANN

b) $5 + 3i$ är ett komplext tal och ingår inte i de reella talen: FALSK

c) Talet 1 ingår i de komplexa talen: SANN

d) talparet $\{1, i\}$ ingår i de komplexa talen: SANN

3. Position 1 och 2 har 10 möjligheter var och position 3 har 5 möjligheter. $10 \cdot 10 \cdot 5 = 500$

4. Första positionen kan ha 5 olika, andra 4 olika osv det vill säga $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$

5. Frågan skall förstås som hur många olika köer kan bildas av 4 ur en grupp av 6. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ möjliga köer.

6. a) $\binom{12}{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792$

b) Hur många olika hockeylag om 5 utespelare kan man forma om man har 12 spelare att välja från?

7. 5 kulor märkta 1 till 5.

a) $P_{\text{kula 1 först}} \cdot P_{\text{kula 2 sen}} \cdot P_{\text{kula 3 sist}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{60} \approx 1.7\ \%$

b) Om ordningen är oviktig kan de tre kulorna komma i vilken ordning som helst dvs:

$$\frac{\text{antal gynnsamma fall}}{\text{totalt antal fall}} = \frac{3!}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{10} = 10\ \%$$

8. $A = \{1,2,4,6,8,10\}$ och $B = \{2,3,4,5,6,7,12,14\}$

a) $A \cap B = [A \text{ snitt } B, \text{dvs de element som finns i både } A \text{ och } B] = \{2,4,6\}$

b) $A \cup B = [A \text{ union } B, \text{dvs de element som finns i } A \text{ eller i } B \text{ eller i båda}] =$
$= \{1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,14\}$

c) $|A \cup B| = [\text{Antalet element i } A \cup B] = 11$

9. Det totala utfallsrummet är:

0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1

Precis 2 klave finns i 3 av fallen dvs $P(2\text{klave}) = \frac{3}{8} = 0.375$, alternativ c) och d).

10. $(x^2 + 2x^3)^6 = \cdots + \binom{6}{6-a} x^{2a} \cdot (2x^3)^{6-a} + \cdots$ där $2a + 3(6-a) = 14$ dvs $a = 4 \Rightarrow$

$$\binom{6}{2} x^8 \cdot (2x^3)^2 = 15 \cdot 4 = 60x^{14}$$

11. a) Båda graferna har 7 noder: SANN

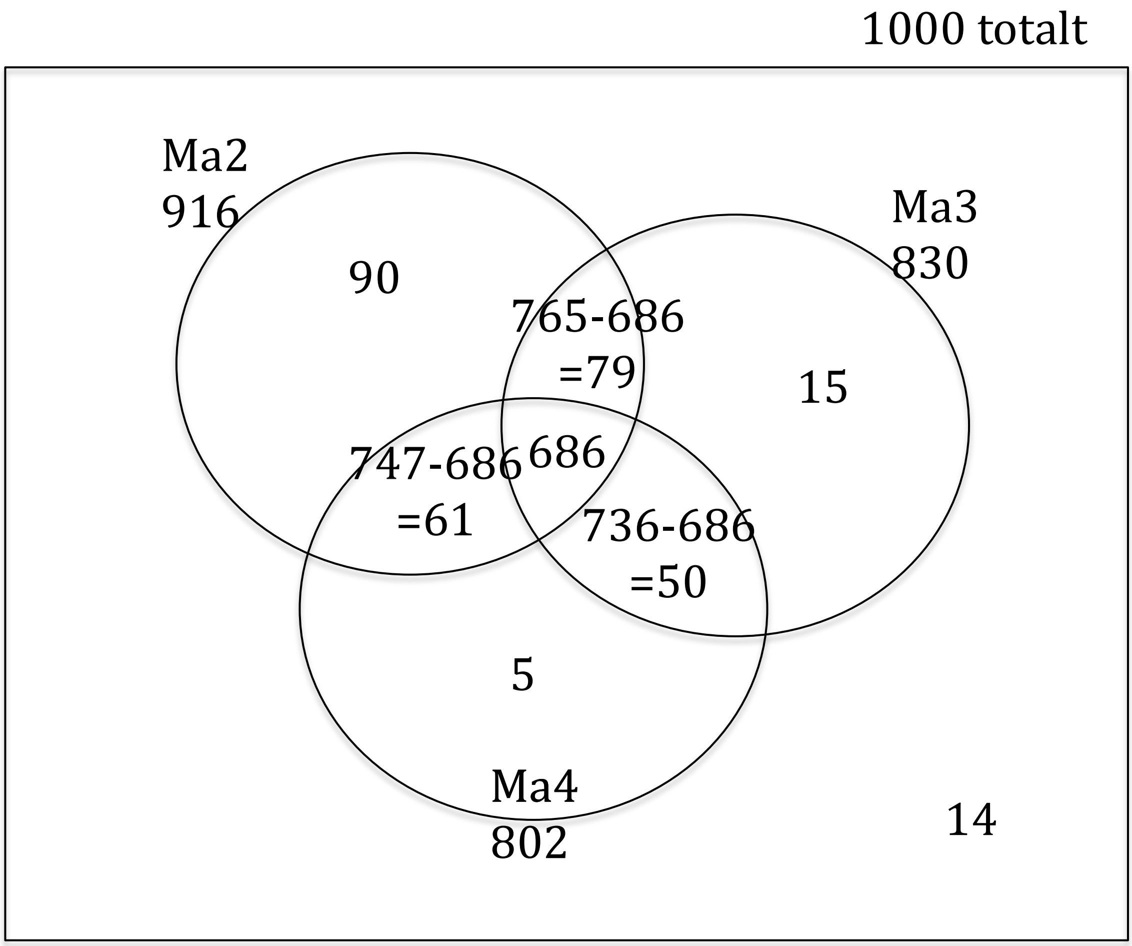
b) 2 av noderna i båda graferna har graden 3 (kopplade till 3 kanter): SANN

c) Inte i någon av graferna kan man passare alla kanter precis en gång: SANN
d) I den nedra grafen kan man passera alla noder precis en gång: FALSK

12. a) $16 = 2^4 = 4^2$ ingår i både *A* och *B*.

c) $4096 = 64^2 = 2^{12}$ ingår i både *A* och *B*.

13.



14. $23 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 999 = 12\,154\,833$ olika registreringsskyltar.

15. $28! \approx 3.05 \cdot 10^{29}$

16. $28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 = 11\,793\,600$ olika sätt

17. Att välja 7 utav 35 utan ordning blir:

$$\binom{35}{7} = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 17 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 31 \cdot 5 \cdot 29 = 6\,724\,520 \text{ möjliga rader}$$

$$\frac{1}{6\,724\,520} \approx 1.5 \cdot 10^{-7}$$

18.

$$\frac{\binom{4}{3}\binom{12}{2}\binom{4}{1}^2}{\binom{52}{5}} = \frac{\binom{4}{1}\binom{12}{2}\binom{4}{1}^2}{\binom{52}{5}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} \cdot 4^3}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{11 \cdot 8}{13 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 49} \approx 1.63 \cdot 10^{-3}$$

19.

$$(1 + x^2)^{25} = \cdots + \binom{25}{5} 1^{20} \cdot (x^2)^5 + \cdots = \cdots + \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} x^{10} + \cdots =$$

$$= \cdots + 5 \cdot 6 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 7 \cdot x^{10} + \cdots = \cdots + 53130x^{10} + \cdots$$

20.

$$\binom{10}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5} \cdot \frac{4^7}{5^7} = 3 \cdot 8 \cdot \frac{1}{5 \cdot 5} \cdot \frac{4^7}{5^7} \approx 0.2$$

21. Man kan skapa en graf med 6 kanter, 6 grafer med 5 kanter, $\binom{6}{2}$ grafer med 4 kanter, $\binom{6}{3}$ grafer med 3 kanter, $\binom{6}{2}$ grafer med 2 kanter, 6 grafer med 1 kant och 1 graf med 0 kanter. Sammantaget blir det:

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$$

Blandade Uppgifter

1. a) $\{2,3,4,6\}$

b) $\{1,2,3\}$

c) $\{2\}$

d) $\{23, 29, 31, 37\}$

5. Förstaplatsen har 4 möjligheter, andra 3 osv: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ olika sätt.

7. $9 + 24 = 33$ men det var bara 30 elever dvs 3 måste utöva båda sporterna.

8.

$$\binom{18}{2} \cdot \binom{12}{2} = \frac{18 \cdot 17}{2 \cdot 1} \cdot \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 9 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 11 = 10\,098 \text{ olika sätt}$$

10. Binomialteoremet ger:

$$(a+b)^{10} = \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{10-i} a^{10-i} b^i = a^{10} + \binom{10}{9} a^9 b + \binom{10}{8} a^8 b^2 + \binom{10}{7} a^7 b^3 + \binom{10}{6} a^6 b^4 +$$

$$+ \binom{10}{5} a^5 b^5 + \binom{10}{4} a^4 b^6 + \binom{10}{3} a^3 b^7 + \binom{10}{2} a^2 b^8 + \binom{10}{1} a b^9 + b^{10} =$$

$$= a^{10} + 10a^9 b + 45a^8 b^2 + 120a^7 b^3 + 210a^6 b^4 +$$

$$+252a^5 b^5 + 210a^4 b^6 + 120a^3 b^7 + 45a^2 b^8 + 10ab^9 + b^{10}$$

13. a) $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

b) $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ eller $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ eller $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

A	A	A	A	A	A	L	L	L	T	T	T
A	A	L	L	T	T	A	A	T	A	A	L
L	T	A	T	A	L	A	T	A	A	L	A
T	L	T	A	L	A	T	A	A	L	A	A

14. Dessa fakulteter innehåller både minst en tvåa och en femma.

15. En första person hälsar på 9 andra, nästa på 8, sedan 7 osv dvs

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \text{ handslag}$$

16. Det är 10 lag som alla skall spela 18 matcher. Skulle kunna tänka leda till 180 matcher, men kom ihåg att i varje match deltar 2 lag. 90 matcher räcker.

17. Faktorn 2 ingår i dem.

18. Alla noder behöver inte vara med i promenaden. Det blir 8 vägar, lite olika långa. Skall alla noder vara med precis en gång finns bara 2 promenader: norr ut eller söder ut från A, sen finns bara en möjlig väg.

20.

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^9 = \cdots + \binom{9}{a} (x^2)^{9-a} \left(-\frac{1}{x}\right)^a + \cdots = \{\text{där } 2(9-a) - a = 0 \Rightarrow a = 6\} =$$

$$= \cdots + \binom{9}{6}(x^2)^3\left(-\frac{1}{x}\right)^6 + \cdots = \cdots + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \cdots = \cdots + 84 + \cdots$$

21. Alla födelsedagar anses lika sannolika och chansen för en viss födelsedag $\frac{1}{365}$.
Det blir möjligen tydligare att söka efter

$$1 - P(\text{alla fyller år på olika dagar}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right)\ldots\left(1 - \frac{29}{365}\right) =$$

$$= 1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \ldots \frac{336}{365} \approx 71\ \%$$

22.

$$\binom{16}{5} + \binom{16}{6} = \frac{16!}{5!\,11!} + \frac{16!}{6!\,10!} = \frac{16!}{5!\,11 \cdot 10!} + \frac{16!}{6 \cdot 5!\,10!} =$$

$$= \frac{6 \cdot 16!}{6 \cdot 5!\,11 \cdot 10!} + \frac{11 \cdot 16!}{6 \cdot 5!\,11 \cdot 10!} = \frac{(6 + 11) \cdot 16!}{6 \cdot 5!\,11 \cdot 10!} = \frac{17!}{6!\,11!} = \binom{17}{6}$$

Generellt gäller:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,\big(n-1-(p-1)\big)!} + \frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!} =$$

$$= \frac{p(n-1)!}{p(p-1)!\,(n-p)!} + \frac{(n-1)!\,(n-p)}{p!\,(n-1-p)!\,(n-p)} = \frac{p(n-1)! + (n-1)!\,(n-p)}{p!\,(n-p)!} =$$

$$= \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

25. a) 10-1-1-1. Totalt antal händer med 13 kort är:

$$\binom{52}{13} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= 17 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 5 \cdot 43 \cdot 14 \cdot 41 \cdot 4$$

Antalet sätt 10 kort kan väljas ur en färg är: $\binom{13}{10} = \binom{13}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 2 \cdot 11$

Antalet sätt ett kort kan väljas ur en färg är 13, den färg som det skall finnas 10 av kan väljas på 4 olika sätt:

$$P(10 - 1 - 1 - 1) = \frac{13 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 4}{17 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 5 \cdot 43 \cdot 14 \cdot 41 \cdot 4} \approx 3.96 \cdot 10^{-6}$$

b) 5-5-3-0. Fem kort kan väljas ur en färg på $\binom{13}{5} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 11 \cdot 9 = 1287$ olika sätt.

Tre kort ur en färg kan väljas på $\binom{13}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 2 \cdot 11 = 286$ olika sätt.

Ordningen på 5-5-3-0 kan väljas på 12 olika sätt. Detta ger:

$$P(5 - 5 - 3 - 0) = \frac{1287 \cdot 1287 \cdot 286 \cdot 12}{17 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 5 \cdot 43 \cdot 14 \cdot 41 \cdot 4} \approx 8.95 \cdot 10^{-3}$$