Kapitel 3

Några uppgifter ur kapitel 3, Geometri.

3122. Låt oss kalla vinklarna α och β.

$$\begin{cases} v+\alpha+\beta=180 \\ u+2\alpha+2\beta=180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=180-v \\ u+2(\alpha+\beta)=180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=180-v \\ u+2(180-v)=180 \end{cases} \Rightarrow$$

$$u+2(180-v)=180 \Rightarrow u=2v-180°$$

3142. Låt kvadratens sida vara $=1$, då blir de tre vita trianglarna:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1+2+2}{8}=\frac{5}{8}\Rightarrow \text{färgad del}=\frac{3}{8}$$

3210. Använd att trianglarna är likformiga. Förhållandet mellan hypotenusan och den långa kateten är alltså lika, dvs.

$$\frac{4.1+9.9}{5.2+x}=\frac{5.2}{4.1}\Rightarrow\frac{4.1}{5.2}14=5.2+x\Rightarrow x\approx 5.8\text{ cm}$$

3211. Likformigheten ger:

$$\frac{a}{c}=\frac{a+b}{c+d}\Leftrightarrow ac+ad=ac+bc\Rightarrow ad=bc\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\text{ VSB}$$

3223.

$$\frac{h}{5}=\sin 66°\Rightarrow h=5\cdot\sin 66°\text{ och }A=\frac{bh}{2}=\frac{7\cdot 5\cdot\sin 66°}{2}\approx 16\text{ dm}^2$$

3224. En uppenbar lösning är den egyptiska triangeln med kateterna 3 och 4 och hypotenusan 5. Som ett andra exempel kan man välja 6, 8 och 10. Eller generellt $3x$, $4x$ och $5x$.

3328. a)

$$\frac{12}{5}=\frac{a}{2}\Rightarrow a=\frac{24}{5}=4.8$$

b) T.ex. $2\cdot(5,2)=(10,4)$

3407.

$$\cos 63°=\frac{85}{F_{tot}}\Rightarrow F_{tot}=\frac{85}{\cos 63°}\approx 187\approx 190\text{ N och }\frac{F}{85}=\tan 63°\Rightarrow F\approx 166\approx 170\text{ N}$$

3408. a) $\sqrt{850^2+180^2}\approx 870\text{ km/h}$

b)

$$\tan\alpha = \frac{180}{850} \Rightarrow \alpha \approx 12° \text{ östlig kurs}$$

3408.

$$(13\cdot\cos 55° + 28\cdot\cos 35°, 13\cdot\sin 55° - 28\cdot\sin 35°) = (30, -5.4)$$

$$|F| = 30 \text{ N och riktning} - 10°$$

Test 3

1.

$$x + y = 180 \text{ men } x = 2y \Rightarrow 2y + y = 3y = 180 \Rightarrow y = 60°$$

2. Ur figuren fås direkt:

$$\sin 25° = \frac{2.1}{5} \approx 0.42$$

(Figurens mått 4.8 cm är fel, borde vara 4.5 cm (om de andra är riktiga).)

3. Om vi tänker oss tre strålar från punkten *P* ut till triangelns hörn ses att vridningen för överlapp blir 120°.

4. Man ser direkt att:

$$\sin v = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow v = 30°$$

5. Sfärens radie är *r* dvs:

$$\frac{\text{sfärens volym}}{\text{kubens volym}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{(2r)^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{8r^3} = \frac{4}{3}\pi\frac{1}{8} = \frac{\pi}{6} \text{ VSV}$$

6. Triangel är rätvinklig, detta leder till att:

$$2y + 2x = 90 \Rightarrow x + y = 45 \Rightarrow y = 45 - x$$

7. Använd Pythagoras sats.

$$10^2 = 6^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow x = 8 \text{ cm}$$

8. I formelsamlingen finns definitionerna av de trigonometriska funktionerna:

$\sin v = \frac{5}{13}$	$\cos v = \frac{12}{13}$	$\tan v = \frac{5}{12}$
$\sin u = \frac{12}{13}$	$\cos u = \frac{5}{13}$	$\tan u = \frac{12}{5}$

9. Pythagoras sats:

$$\text{kabel}^2 = \left(\frac{490}{2}\right)^2 + (197 - 57)^2 \Rightarrow \text{kabel} \approx 280 \text{ m}$$

10. a)

$$\frac{x}{45} = \sin 37° \Rightarrow x = 45 \cdot \sin 37° \approx 27 \text{ cm}$$

b)

$$\frac{69}{x} = \sin 61° \Rightarrow x = \frac{69}{\sin 61°} \approx 79 \text{ dm}$$

(Fel i facit.)

12. a)

$$v = \arctan\frac{18}{24} \approx 37°$$

b)

$$v = \arcsin\frac{61}{92} \approx 42°$$

14. a) $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 = (2, 4) + (-2, 3) = (0, 7)$

b) $|\bar{u}_1 + \bar{u}_2| = |(0, 7)| = \sqrt{0^2 + 7^2} = 7$ l.e.

c) $2\bar{u}_1 + 3\bar{u}_2 = 2 \cdot (2, 4) + 3 \cdot (-2, 3) = (4, 8) + (-6, 9) = (-2, 17)$

d) $3\bar{u}_1 - 4\bar{u}_2 = 3 \cdot (2, 4) - 4 \cdot (-2, 3) = (6, 12) + (8, -12) = (14, 0)$

15. Vinkeln blir $\arctan\frac{2}{10} \approx 11°$ under horisontalplanet. Längden på vektorn blir $\sqrt{10^2 + 2^2} \approx 10.2 \text{ m/s}$.

Blandade uppgifter i kapitel 3

1. De trigonometriska funktionernas definition (i formelsamlingen) ger direkt:

a) $\sin x = \frac{4}{5}$ *b)* $\cos y = \frac{4}{5}$ *c)* $\tan y = \frac{3}{4}$ *d)* $\sin y = \frac{3}{5}$

2. a)

$$\sin 32° = \frac{x}{32} \Rightarrow x = 32 \sin 32° \approx 17 \text{ cm}$$

b)

$$\sin 65° = \frac{46}{x} \Rightarrow x = \frac{46}{\sin 65°} \approx 51 \text{ dm}$$

6.

$$V = \frac{Bh}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot 6.5}{3} = \frac{\pi(7.5^2 - 6.6^2) \cdot 6.5}{3} \approx 95 \text{ cm}^3$$

7.

$$v_2 = 145° \Rightarrow v_1 = 180° - 145° = 35°$$

9. $v + 55° + (180° - 135°) = 180 \Rightarrow v = 135° - 55° = 80°$

10.

$$\tan 25° = \frac{h}{145} \Rightarrow h = 145 \cdot \tan 25° \approx 68 \text{ m}$$

11. Avståndet fås med hjälp av Pythagoras sats:

$$d = \sqrt{4.8^2 - 4.2^2} \approx 2.3 \text{ m}$$

12. Låt vinkeln $B = x$ och $A = 2x$, då gäller:

$$15° + x + 2x = 180 \Rightarrow 3x = 165° \Rightarrow x = 55° \text{ dvs } A = 110°$$

13.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{24 \cdot \sqrt{25^2 - 24^2}}{2} = 84 \text{ cm}^2$$

14.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow 1.35 = \frac{b \cdot 0.7b}{2} \Rightarrow b^2 = \frac{2.7}{0.7} \Rightarrow b \approx 2.0 \text{ m}, h \approx 1.4 \text{ m}$$

16.

$$A_r = \pi \cdot r^2, A_{2r} = \pi \cdot (2r)^2 = \pi \cdot 4r^2 = 4 \cdot A_r \text{ VSV}$$

21.

$$v + v + (180 - u) = 180 \Rightarrow 2v - u + 180 = 180 \Rightarrow u = 2v \text{ VSV}$$

22.

$$A_{\text{grön}} = \pi(18^2 - 13^2) = 155\pi \approx 490 \text{ mm}^2 = 4.9 \text{ cm}^2$$

23. a)

$$\measuredangle ACH = \arccos\frac{26}{30} \approx 30°$$

b)

$$AH = \sqrt{30^2 - 26^2}, BAC = v_1 + v_2 \approx 60° + \arctan\frac{13}{\sqrt{30^2 - 26^2}} \approx 60° + 41° = 101°$$

24. Låt den lilla cirkelns radie vara 1.

$$A_{\text{röd}} = \frac{\pi(2r)^2 - \pi r^2}{\pi(2r)^2} = \frac{\pi 4r^2 - \pi r^2}{\pi 4r^2} = \frac{\pi 3r^2}{\pi 4r^2} = \frac{3}{4}$$

25. Låt basen vara 12 cm, då hittas de två lika vinklarna som:

$$v_1 = v_2 = \arccos\frac{6}{18} \approx 70.5° \text{ och toppvinkeln} = 38.9°$$

26. Låt sidan var 4 längdenheter, då blir det blå området:

$$\frac{3 \cdot 3}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} = \frac{9-4}{2} = \frac{5}{2} \text{ a.e.}$$

Hela triangelns area $= \frac{4 \cdot 4}{2} = 8 \Rightarrow \frac{\text{blå}}{\text{hela}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$

27.

$$\bar{u} \parallel \bar{v} \text{ och } \bar{u} = 3\bar{v}$$

$$|\bar{u} + \bar{v}| = |3\bar{v} + \bar{v}| = |4\bar{v}| = 4|\bar{v}|$$

$$|\bar{u} - \bar{v}| = |3\bar{v} - \bar{v}| = |2\bar{v}| = 2|\bar{v}|$$

28.

$$\overline{CM} = -\bar{v}, \overline{AC} = \bar{u} + \bar{v}, \overline{AB} = \bar{u} - \bar{v}, \overline{BA} = \bar{v} - \bar{u}$$

29. Koordinaterna hos den resulterande vektorn blir:

$$(10\cos 50° + 31\cos 40°, 10\sin 50 - 31\sin 40°) \approx (30, -12)$$

Absolutbelopp ≈ 33 N och riktning $\arctan\frac{-12}{30} \approx -22°$.

30.

	$sinv$	$cosv$	$tanv$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

32. Halva resultanten kan finnas som $25 \cdot \cos 20°$ dvs $F_r = 2 \cdot 25\cos 20° \approx 47$ N

33. Stjärnans armars längd kan tecknas som $2r \cdot \sin 72°$ och det skall vara 5 armar, och ringen runt om är $2 \cdot \pi \cdot r$ dvs $2\pi r + 5 \cdot 2r \cdot \sin 72° = 100 \text{ mm} \Rightarrow r \approx 6 \text{ mm}$

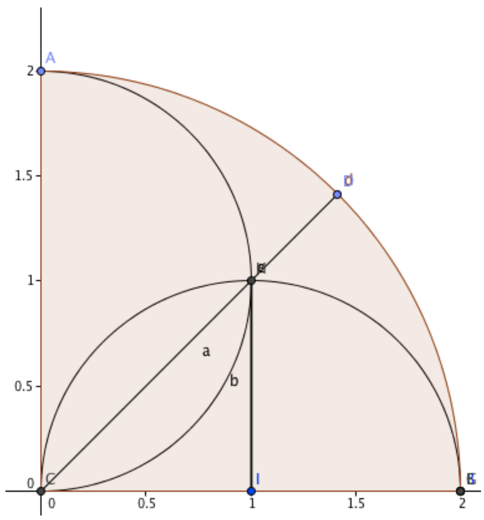
34. Alla trianglar i figuren är kongruenta. Den stora triangelns hypotenusa $= 5$.

Om vi kallar kvadratens sida för x och adderar de delar som tillsammans utgör hypotenusan 5 fås:

$$x + x\frac{3}{4} + x\frac{4}{3} = 5 \Rightarrow x\left(1 + \frac{3}{4} + \frac{4}{3}\right) = 5 \Rightarrow x\frac{12+9+16}{12} = x\frac{37}{12} = 5 \Rightarrow$$

$$x = \frac{60}{37} \approx 1.6 \text{ cm}$$

35. Låt de små cirklarna har radie $= r$ och den stora radie $= 2r$.



Man kan hitta att den vänstra halvan av den gröna ytan är:

$$\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} \Rightarrow A_{\text{grön}} = \frac{\pi r^2}{2} - r^2$$

Den högra halvan av den röda ytan kan skrivas som:

$$\frac{\pi(2r)^2}{8} - \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} = \frac{\pi 4r^2}{8} - \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} = \frac{\pi 2r^2}{4} - \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} \Rightarrow$$

$$A_{\text{röd}} = \frac{\pi r^2}{2} - r^2 \text{ VSV}$$