Kapitel 1

1.3

$$A^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1 - 2 \cdot 2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 2 - 2 \cdot 1}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

1.4 a)

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \left(-\frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

b)

$$XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\left(-\frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$AXB = I \Leftrightarrow X = A^{-1}IB^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

1.6

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 2a + 4c & 2b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Detta skulle betyda att $1 = 2b + 4d = 2(b + 2d) = 2 \cdot 0 = 0$ vilket är orimligt dvs matrisen är inte inverterbar.

1.7

$$(A + B)(A - B) = A^2 + BA - AB - B^2 \neq A^2 - B^2$$

1.8

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 \text{ endast då } BA = AB$$

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bv \\ cx + dz & cy + dv \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} x & y \\ z & v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + yc & bx + dy \\ az + cv & bz + dv \end{bmatrix}$$

Konjugatregeln gäller inte generellt för matriser.

Kapitel 2

2.1 a)

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{bmatrix} \text{ dvs } (2\text{X}2) - \text{matris}$$

b)

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \text{ dvs skalär}$$

c)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix} \text{ kan INTE multipliceras}$$

d)

$$(4\text{x}4)(4\text{x}5) = (4\text{x}5)$$

2.2

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 15 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2.3

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) & 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \\ (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 1 & (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) & (-2) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & (-2) \cdot 3 + 2 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -6 & 7 & 16 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -6 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2.4 Då $B = A^{-1}$ fås direkt att:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40+32+27 \\ 13-10-9 \\ 5-4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

2.5

$$\begin{cases} 15A + 10B = 63 \\ 25A + 17B = 106 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 25 & 17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 \\ 106 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = Y$$

$$X^{-1} = \frac{1}{15 \cdot 17 - 10 \cdot 25}\begin{bmatrix} 17 & -10 \\ -25 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = X^{-1}Y = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 17 & -10 \\ -25 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 63 \\ 106 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 11 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.20 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ kr}$$

2.6 Storleksanalys: $(m \times n)(n \times n) = (m \times n)$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{ix} & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} I_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{ix} & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1_{11} & \cdots & 0_{1n} \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0_{i1} & 1_{ix} & 0_{in} \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0_{n1} & \cdots & 1_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{ix} & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2.7

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Rad 1 har bytt plats med rad 2.

Detta betyder att $E_{i,j}A$ är som matrisen *A* men rad *i* och rad *j* har bytt plats.

2.8

$$E\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Man kan tänka sig en matris som liknar *I* men där element (i, i) är bytt från 1 till *k*. En sådan matris kallas $E_i(k)$.

$$E_i(k) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & k & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Kapitel 3

3.1

$$f(x,y)=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}\left(x\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)=$$

$$=x\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=xT_Af(e_1)+yT_Af(e_2)$$

$$T_A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

3.2

$$T_A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

3.3

$$AX=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-2y\\ -3x+6y\end{bmatrix}=\{t=x-2y\}=\begin{bmatrix}t\\ -3t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\ -3\end{bmatrix}$$

Det betyder att R^2 avbildas på $\begin{bmatrix}t\\ -3t\end{bmatrix}$. Där ingår till exempel inte $(0,4)$.

3.4

$$\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\text{ och }\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix}$$

3.5

$$f(0,0)=0\cdot f(e_1)+0\cdot f(e_2)=0+0=0$$

3.6 a) $f(x,y)=(x,0)\Rightarrow T_A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ ty $f(x,y)=T_A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ 0\end{bmatrix}$

b) Avbildningen avbildar alla punkter direkt ned (vinkelrätt) på x-axeln.

3.7 Låt vektorn (x,y) ha längden d och argumentet α. Då gäller $(x,y)=d(\cos\alpha,\sin\alpha)$.
För den vinkeln θ transformerade vektorn gäller:

$$(\hat{x},\hat{y})=d(\cos(\alpha+\theta),\sin(\alpha+\theta))=$$

$$=d(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta,\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta)=$$

$$=(d\cos\alpha\cos\theta-d\sin\alpha\sin\theta,d\sin\alpha\cos\theta+d\cos\alpha\sin\theta)=$$

$$=(x\cos\theta-y\sin\theta,y\cos\theta+x\sin\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

$$\text{dvs } A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} =$$