

Valda uppgifter i kursboken Matematik M3c av Sjunnesson med flera utgiven på Liber, (2012).

Test 3 ..... 1

### Test 3

1. a)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x + 5)(x - 5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} x + 5 = 10$$

b)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3 + h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20 + 0.98^x}{5} = 4$$

2. a)

$$y = x^5 - 4x^3 + 9x - 4 \Rightarrow y' = 5x^4 - 12x^2 + 9$$

b)

$$y = (5x - 1)(5x + 1) = 25x^2 - 1 \Rightarrow y' = 50x$$

3. a)

$$f(x) = 3x^3 - x^2 \Rightarrow f'(x) = 9x^2 - 2x \Rightarrow f'(4) = 9 \cdot 16 - 8 = 136$$

b)

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \Rightarrow f'(4) = \frac{4}{2} - \frac{16}{2} = -6$$

c)

$$f(x) = 3x - 7 \Rightarrow f'(x) = 3 \Rightarrow f'(4) = 3$$

4. a)  $f(0) = 3$

b)  $f(2) = 1$

c)  $f'(1) = 0$

d)  $f'(2) \approx 3$

e)  $f'(x) > 0$  då  $1 < x < 3$

5. a)  $f(x) = 5x^7 - 3x^4 + 10^2 \Rightarrow f'(x) = 35x^6 - 12x^3$

b)  $g(x) = -0.5x^4 + 4x^2 - 5x + c^3 \Rightarrow g'(x) = -2x^3 + 8x - 5$

c)  $h(u) = 8\sqrt{u} - u^{-2} + 2u^{1.3} \Rightarrow h'(u) = \frac{4}{\sqrt{u}} + 2u^{-3} + 2.6u^{0.3}$

6.  $y(x) = x^3 - 6x + 2 \Rightarrow y'(x) = 3x^2 - 6 \Rightarrow y'(1) = -3$  punkten  $(1, -3) \Rightarrow y = -3x$

7.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1 + h)^2 - 3 \cdot 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + 6h + 3h^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + 3h) = 6$$

8.

Punkterna är  $(1, 5)$  och  $(3, 9) \Rightarrow k = 2, f'(x) = 6 - 2x = 2 \Rightarrow x = 2, y = 8$

$$\text{dvs } y = 4 + 2x$$

9.  $s(t) = 3t^2 + 5t \Rightarrow s'(t) = 6t + 5 \Rightarrow s(2) = 22 \text{ m}$  och  $s'(2) = 17 \text{ m/s}$

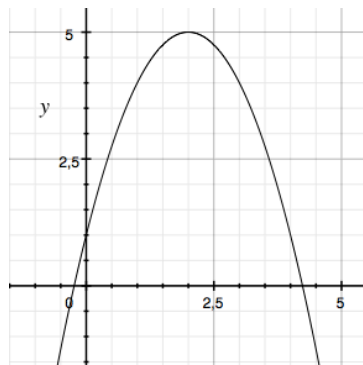
Efter 2 sekunder har föremålet rört sig 22 m och har hastigheten 17 m/s.

10. a)  $f(x) = x^{99} \Rightarrow f'(x) = 99x^{98} \Rightarrow f'(-1) = 99$

b)  $f(x) = (x - 3)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x - 3) \Rightarrow f'(-1) = -8$

c)  $f(x) = 7x \Rightarrow f'(x) = 7 \Rightarrow f'(-1) = 7$

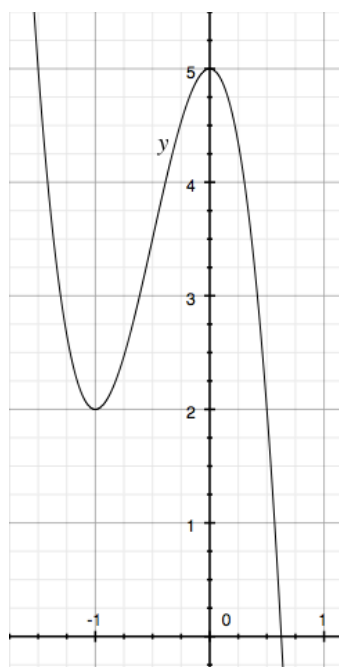
11. till exempel  $g(x) = -x^2 + 4x + 1 \Rightarrow g'(x) = -2x + 4$



12.

$$y = ax^3 - 9x^2 + 5 \Rightarrow y' = 3ax^2 - 18x, y'(-1) = 3a + 18 = 0 \Rightarrow a = -6$$

$$y = -6x^3 - 9x^2 + 5, \text{ växande då } -1 \leq x \leq 0$$



13. En inflexionspunkt betyder att funktionen stiger för  $x < 5$  och för  $x > 5$ . Derivatan är alltså positiv utom då  $x = 5$  då är  $g'(x) = 0 \Rightarrow$  är  $g''(5) = 0$ .

14. a) Då  $x = 0$  och  $x = 3$ .

b) När  $x > 3$ .

c) Då  $x < 3$ .

d) När  $x = 0$  och  $x = 3$ .

15.  $h''(x) = 6x \Rightarrow h'(x) = 3x^2 + C_1 \Rightarrow h(x) = x^3 + C_1x + C_2$

16.  $y'(x) = (x - 2)^2 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{3}(x - 2)^3 + C$

17.  $s(t) = 20t - 5t^2 \Rightarrow s'(t) = 20 - 10t$

a)  $s'(1.5) = 5$  m/s

b)  $s(3) = 20 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 15$  m

c)  $s'(t) = 20 - 10t = 0 \Rightarrow t = 2$  s

d)  $s(2) = 20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 20$  m

18. a)

$$V(p) = 50\,000p - 20p^2 - 80\,000 \Rightarrow V'(p) = 50\,000 - 40p = 0 \Rightarrow p = 1\,250 \text{ kr}$$

b)

$$V(1\,250) \approx 31 \text{ miljoner kr}$$

19.

$$m(t) = 4.5 \cdot t^{0.25} \Rightarrow m'(t) = 1.125 \cdot t^{-0.75} \Rightarrow m'(10) \approx 0.2 \text{ kg/min}$$

Ismassan växer med 0.2 kg/min vid tiden 10 minuter.

20.

a)

$$y = \frac{x(14 - x)}{2}$$

b)  $0 < x < 14$

c)

$$y = \frac{x(14 - x)}{2} = \frac{1}{2}(14x - x^2) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}(14 - 2x) = 0, x = 7$$

$$y_{max} = \frac{7(14 - 7)}{2} = 24.5 \text{ cm}^2$$

21. a)

$$A(x) = x \cdot (-0.5x + 4) \text{ a. e.}$$

b)  $0 < x < 8$

c)

$$A(x) = -0.5x^2 + 4x \Rightarrow A'(x) = -x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$A(4) = 4 \cdot (-0.5 \cdot 4 + 4) = 8 \text{ a. e.}$$

22.

$$y = 8x - x^2 \Rightarrow y' = 8 - 2x = -2 \Rightarrow x = 5$$

$$y(5) = 8 \cdot 5 - 5^2 = 15 \Rightarrow (5, 15)$$

23.

$$N(x) = 40\,000 + 1\,000x + 200x^2$$

a)

$$N(3) = 40\,000 + 1\,000 \cdot 3 + 200 \cdot 3^2 = 44\,800 \text{ st}$$

b)

$$N(5) = 40\,000 + 1\,000 \cdot 5 + 200 \cdot 5^2 = 50\,000 \text{ st}$$

Ökning cirka 5 000 st.

c) Ökningen klockan 12 är:

$$N'(x) = 1\,000 + 400x, N'(3) = 1\,000 + 400 \cdot 3 = 2\,200 \text{ st/timme}$$

24.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{för } x \leq 4 \\ x + C & \text{för } x > 4 \end{cases} \Rightarrow C = 12$$

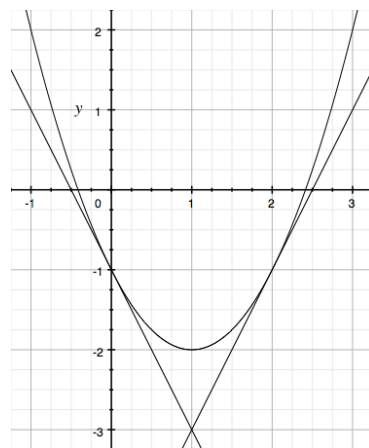
25.

$$y = x^2 - 2x - 1 \Rightarrow y' = 2x - 2$$

Den ena linjen går genom  $(0, -1)$  och lutar  $k = -2, y_1$ .

Den andra går genom  $(2, -1)$  och lutar  $k = 2, y_2 = -5 + 2x$ .

$$-1 - 2x = -5 + 2x \Rightarrow x = 1, y = -3$$





26.

$$V(r) = \pi r^2(6.4 - r) = \pi(6.4r^2 - r^3) \Rightarrow V'(r) = \pi(12.8r - 3r^2) = 0$$

$$r = \frac{12.8}{3} \approx 4.3 \text{ cm} \Rightarrow V_{\max}\left(\frac{12.8}{3}\right) = \pi r^2(6.4 - r) \approx 122 \text{ cm}^3$$

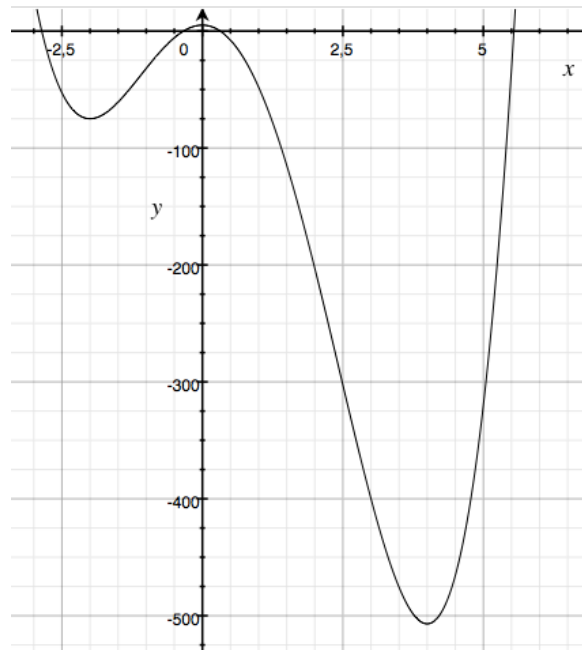
27.

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 48x^2 + 5 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 96x = 12x(x^2 - 2x - 8) = 0$$
$$f'(x) = 12x(x - 4)(x + 2)$$

Största värde finns i gränsen  $x = -3$ . Minsta värdet i  $x = 4$ .

$$f(-3) = 3(-3)^4 - 8(-3)^3 - 48(-3)^2 + 5 = 32$$

$$f(4) = 3(4)^4 - 8(4)^3 - 48(4)^2 + 5 = -507$$



28. a)

$$f(x) = x^4 + 5$$

b)

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(3) = 4 \cdot 3^3 = 108$$

$$\text{Punkten är } (3, 86) \Rightarrow y = -238 + 108x$$

