Valda uppgifter i kursboken Matematik M3c av Sjunnesson med flera utgiven på Liber, (2012).

Kapitel 1

1214.

$$\measuredangle B + \measuredangle C = 90° \Rightarrow A\measuredangle = 90°, \sin B = \frac{AC}{h}, \cos C = \frac{AC}{h} \text{ VSV}$$

Där h är triangelns hypotenusa, $h = BC$.

1215. Den minsta vinkel är motstående den kortaste sidan dvs

$$\tan v = \frac{8}{\text{den längsta kateten}} = \frac{1}{2.4} \Rightarrow \text{den längsta kateten} = 19.2 \text{ cm}$$

Pythagoras sats ger att hypotenusan är:

$$h = \sqrt{8^2 + 19.2^2} = 20.8 \text{ cm}$$

1216. Kalla kateterna k_1 och k_2 och hypotenusan h. Detta ger:

$$\sin v = \frac{k_1}{h} \text{ och } \cos v = \frac{k_2}{h} \Rightarrow \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\frac{k_1}{h}}{\frac{k_2}{h}} = \frac{k_1}{k_2} = \tan v \text{ VSV}$$

1217. Dela upp pentagonen i fem likbenta trianglar.
Toppvinkeln i dessa trianglar är $\frac{360}{5} = 72°$.
Detta medför att de andra vinklarna i trianglarna blir $\frac{180-72}{2} = 54°$.
Höjden i de fem trianglarna fås som $\tan 54° = \frac{h}{3.5} \Rightarrow h \approx 4.8$ cm. Den totala arean blir:

$$A = 10 \cdot \frac{4.8 \cdot 3.5}{2} \approx 84 \text{ cm}^2$$

1227.
a)

$$h = \sqrt{3.5^2 + 7^2} \approx 7.8 \text{ cm}$$

sidorna är 7, 3.5 och 7.8 cm

b) Arean är $A = \frac{3.5 \cdot 7}{2} = 12.25 \text{ cm}^2$

1228. Båda har rätt enligt:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

1229.
Kalla den längsta sidans längd a. Då blir den kortaste sidan $\frac{a}{2}$. Pythagoras sats ger oss den andra katetens längd som $\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Omkrets $=6\Rightarrow a+\frac{a}{2}+a\frac{\sqrt{3}}{2}=6\Rightarrow a=\frac{6\cdot 2}{3+\sqrt{3}}$
Den kortaste sidan är $\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\frac{6\cdot 2}{(3+\sqrt{3})}=\frac{6(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=\frac{6(3-\sqrt{3})}{9-3}=(3-\sqrt{3})$ cm

1316. a) $\sin 210°=\sin(180°+30°)=\sin(-30°)=-\sin(30°)=-0.5$

b) $\cos 210°=\cos(180°+30°)=-\cos(30°)=-\sqrt{3}/2$

c) $\tan 210°=\frac{\sin 210°}{\cos 210°}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

1425. Vinklarna blir 26°, 43° och 111°. Sinussatsen ger $\frac{\sin 43°}{AC}=\frac{\sin 111°}{16}\Rightarrow AC=16\frac{\sin 43°}{\sin 111°}$
Areasaten ger $\frac{16\cdot h}{2}=\frac{16\cdot\sin 26°}{2}16\frac{\sin 43°}{\sin 111°}\Rightarrow h=16\frac{\sin 43°\cdot\sin 26°}{\sin 111°}\approx 5.1$ cm

1426. a) Om $AB\neq AC$ fås två värden.
b) Om $AB=AC$ fås ett värde, vinklarna *B* och *C* är lika stora.

1427. Låt *A* vara randvinkel. Då blir mittpunktsvinkeln stående mot sträckan *a* enligt randvinkelsatsen $=2A$.

$$\sin A=\frac{a/2}{R}\Rightarrow\frac{\sin A}{a}=\frac{1}{2R}\text{ VSV}$$

1440. 5, 12, 13 är en rätvinklig triangel. De andra två vinklarna är $\alpha=\arcsin\frac{5}{13}\approx 23°$ och $\beta=\arcsin\frac{12}{13}\approx 67°$.

Test 1

1. a) $\sin v = \frac{8}{16} = 0.5$

b) $v = 30°$

2. Areasatsen ger direkt $A = \frac{4 \cdot 5 \cdot \sin 60°}{2} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

3. a) $x^2 + y^2 = 16$

b) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$

c) $(x+6)^2 + (y+2)^2 = 64$

4. a) $\sin v = \frac{4}{5} = 0.8$

b) $\cos v = \frac{3}{5} = 0.6$

c) $\sin(180 - v) = \frac{4}{5} = 0.8$

d) $\cos(-v) = \cos v = 0.6$

e) $\tan v = \frac{4}{3} \approx 1.33$

f) $\cos(180 - v) = -\cos v = -0.6$

5. a) $\sin v = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v = 60°$ eller $v = 120°$

b) $\cos v = 0.5 \Rightarrow v = 60°$ eller $v = 300°$

6. Areasatsen $A = \frac{4\sqrt{2}\sin v}{2} = 2 \Rightarrow \sin v = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow v = 45°$

7. a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$

b) $x^2 + (y-1)^2 = 1$

c) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 5$

8. Hypotenusan är $h = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \Rightarrow \sin(180 - v) = \frac{3}{\sqrt{13}} = \sin v$

9. a) Vinkeln $B = 97° \Rightarrow \frac{\sin 97°}{AC} = \frac{\sin 48°}{8.2} \Rightarrow AC = 8.2\frac{\sin 97°}{\sin 48°} \approx 11\ \text{cm}$

b) Areasatsen $A = \frac{1}{2} 8.2 \sin 35°\, 8.2 \frac{\sin 97°}{\sin 48°} \approx 26\ \text{cm}^2$

10. $\sin 157° \approx 0.39, \cos 157° \approx -0.92$, rita en enhetscirkel så förstår du!

11.

$$\frac{\sin\alpha}{16}=\frac{\sin(152°-\alpha)}{13}=\frac{\sin 28°}{x}\Rightarrow 13\sin\alpha=16\sin(152°-\alpha)$$

$$13\sin\alpha=16\sin 152°\cos\alpha-16\cos 152°\sin\alpha$$

$$(13+16\cos 152°)\sin\alpha=16\sin 152°\cos\alpha\Rightarrow\tan\alpha=\frac{16\sin 152°}{13+16\cos 152°}\Rightarrow\alpha=-81°$$

Då en negativ vinkel i en triangel inte är något att ha, tar vi:

$$\alpha=81°\Rightarrow x=16\cdot\frac{\sin 28°}{\sin 81°}\approx 7.6\text{ cm}$$

12. a) $\measuredangle C=180-72-54=54°=\measuredangle A\Rightarrow$ triangeln är likbent $\Rightarrow AB=BC=12$ cm

b) Sinussatsen ger $\frac{AC}{\sin 72°}=\frac{12}{\sin 54°}\Rightarrow AC=\frac{12\cdot\sin 72°}{\sin 54°}\approx 14$ m

$$\frac{\sin 54°}{CD}=\frac{\sin\alpha}{14.1}=\frac{\sin(126°-\alpha)}{6}\Rightarrow 6\sin\alpha=14\sin(126°-\alpha)\Rightarrow$$

$$6\sin\alpha=14\sin 126°\cos\alpha-14\cos 126°\sin\alpha\Rightarrow$$

$$(6+14\cos 126°)\sin\alpha=14\sin 126°\cos\alpha\Rightarrow\tan\alpha=\frac{14\sin 126°}{(6+14\cos 126°)}\Rightarrow$$

$$\alpha\approx-79°\Rightarrow CD=14.1\frac{\sin 54°}{\sin 79°}\approx 11.6\text{ m}$$

13.

$$(x+1)^2+(y-4)^2=20$$

14. a) Cosinussatsen ger:

$$29^2=15^2+21^2-2\cdot 15\cdot 21\cos A\Rightarrow A\approx 106.1°$$

$$21^2=15^2+29^2-2\cdot 15\cdot 29\cos B\Rightarrow B\approx 44.1°\Rightarrow C=29.8°$$

b)

$$A=\frac{15\cdot 21\sin 106.1°}{2}\approx 151\text{ m}^2$$

15. Sinussatsen ger t.ex.:

$$\frac{\sin 35°}{3.4}=\frac{\sin B}{5.5}\Rightarrow B=68°\Rightarrow C=77°$$

$$\frac{\sin 77°}{AB}=\frac{\sin 35°}{3.4}\Rightarrow AB=5.8\text{ cm}$$

16.

$$8 = x^2 - 8x + y^2 + 10y = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 10y + 25 - 16 - 25$$

$$49 = (x-4)^2 + (y+5)^2$$

Radie 7 medelpunkt $(4, -5)$.

17. Areasatsen ger:

$$A = \frac{x(25-x)\sin 42°}{2} = 45.8 \text{ cm}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{2 \cdot 45.8}{\sin 42°} = 25x - x^2 \Rightarrow x^2 - 25x + \frac{2 \cdot 45.8}{\sin 42°} = 0 \Rightarrow$$

$$x = 12.5 \pm \sqrt{(12.5)^2 - \frac{2 \cdot 45.8}{\sin 42°}} \approx 12.5 \pm 4.4 = \begin{cases} 16.9 \\ 8.1 \end{cases}$$

Cosinussatsen ger:

$$BC^2 = 16.9^2 + 8.1^2 - 2 \cdot 16.9 \cdot 8.1 \cdot \cos 42° \Rightarrow BC \approx 12.2 \text{ cm}$$

Blandade uppgifter i kapitel 1

26.

$$x^2 + (3x+3)^2 = 25^2 \Rightarrow x^2 + 9x^2 + 18x + 9 = 625 \Rightarrow 10x^2 + 18x - 616 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + 1.8x - 61.6 = 0 \Rightarrow x = -0.9 \pm \sqrt{0.81 + 61.6} = \begin{cases} x_1 = 7 \\ (x_2 = -8.8) \end{cases}$$

$$\sin v = \frac{7}{25} \Rightarrow v \approx 16.3°$$

27. a) Kalla fyrens höjs för h.

$$\tan 3.5° = \frac{h}{AC} \text{ och } \tan 5.6° = \frac{h}{BC} \text{ och } AC - BC = 530 \text{ m}$$

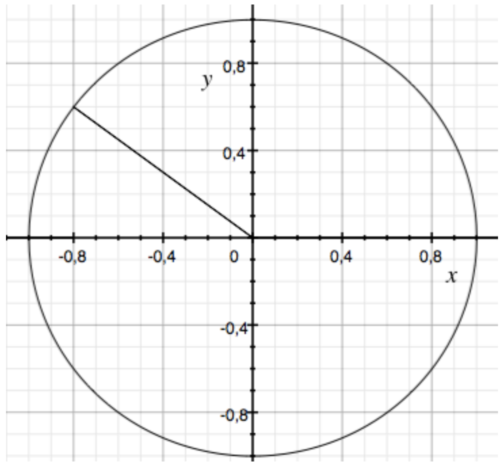
$$BC \tan 5.6° = AC \tan 3.5° = (BC + 530) \tan 3.5° \Rightarrow$$

$$BC = \frac{530 \tan 3.5°}{\tan 5.6° - \tan 3.5°} \approx 880 \text{ m}$$

b)

$$h = BC \tan 5.6° \approx 86 \text{ m}$$

28.
Ur figuren nedan kan man avläsa att $0.6^2 + \cos^2 v = 1 \Rightarrow \cos v = -\sqrt{1 - 0.6^2} = -0.8$



29.
Sinussatsen ger:

$$\frac{\sin 38°}{2AB} = \frac{\sin C}{AB} \sin C = \frac{\sin 38°}{2} \Rightarrow C \approx 17.9°$$

Vinkelsumman i en triangel ger att $\measuredangle B = 180 - 38 - 17.9 = 124°$

Sinussatsen en gång till ger:

$$\frac{\sin 38°}{2AB} = \frac{\sin 124°}{3} \Rightarrow AB \approx 1.11 \text{ cm}$$

Med hjälp av areasatsen fås:

$$A = \frac{1}{2} 1.11 \cdot 2.22 \cdot \sin 124° \approx 1.0 \text{ cm}^2$$

30. Med hjälp av de tre riktningskoefficienterna k_1, k_2 och k_3 fås vinklar som:

$$\arctan -1 = -45°, \arctan \frac{3}{4} \approx 37° \text{ och} \arctan -8 \approx -83°$$

Tillsammans ger detta triangelns vinklar som 82°, 38° och 60°.

31. Vinklarna i den stora triangeln är 30°, 75° och 75°. Kalla triangelns bas *b*. Då gäller:

$$\sin 15° = \frac{\frac{b}{2}}{25} \text{ dvs } b = 50 \sin 15°$$

och i den lilla triangeln fås:

$$\tan 15° = \frac{x}{b/2} \Rightarrow x = \frac{b}{2} \tan 15° = 25 \sin 15° \tan 15° \approx 1.7 \text{ cm}$$

32. Areasatsen ger direkt:

$$A = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 30° = \frac{1}{4} AB \cdot (19 - AB) = 19.5 \Rightarrow$$

$$AB^2 - 19AB + 78 = 0 \Rightarrow AB = 9.5 \pm \sqrt{9.5^2 - 78} = \begin{cases} 13 \text{ cm} \\ 6 \text{ cm} \end{cases}$$

33.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 4 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \text{ dvs centrum i } (1, -2), r = 2 \text{ le}$$

34. Fall 1: Antag att vinkeln mellan krafterna är spetsig. Kalla den trubbiga vinkeln i parallellogrammet β och den spetsiga α. Enligt sinussatsen gäller:

$$\frac{\sin 40.8°}{175} = \frac{\sin \alpha}{225} \Rightarrow \alpha \approx 57° \Rightarrow \beta \approx 82° \text{ och sinussatsen igen:}$$

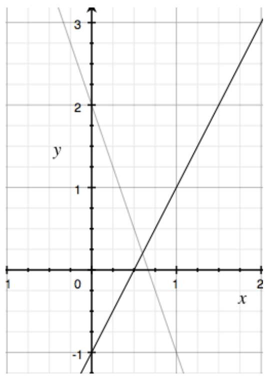
$$\frac{\sin 40.8°}{175} = \frac{\sin 82°}{|F_1 + F_2|} \Rightarrow |F_1 + F_2| \approx 265 \text{ N}$$

Fall 2: Antag att vinkeln mellan krafterna är trubbig. Kalla den trubbiga vinkeln i parallellogrammet β och den spetsiga α. Enligt sinussatsen gäller:

$$\frac{\sin 40.8°}{175} = \frac{\sin \beta}{225} \Rightarrow \beta \approx 123° \Rightarrow \alpha \approx 16.3° \text{ och sinussatsen igen:}$$

$$\frac{\sin 40.8°}{175} = \frac{\sin 16.3°}{|F_1 + F_2|} \Rightarrow |F_1 + F_2| \approx 75.4 \text{ N}$$

35.



Linjernas vinklar är $\arctan(-3)$ och $\arctan 2$. Den spetsiga vinkeln blir:

$$180 - \arctan 3 - \arctan 2 = 45°$$