

Valda uppgifter i kursboken Matematik M2c av Sjunnesson med flera utgiven på Liber, (2011).

| | |
|--------------------------------------|---|
| Kapitel 2 | 1 |
| Test i kapitel 2 | 7 |
| Blandade uppgifter i kapitel 2 | 7 |

Kapitel 2

2108. $x + (180 - y) = 120 \Rightarrow x = y - 60$

2114.

$$2 \cdot \sphericalangle GFE + 2 \cdot \sphericalangle FGE = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle GFE + \sphericalangle FGE = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle FEG = 90^\circ$$

2115.

Man kan uttrycka summan av triangelns vinklar som:

$$(180 - a) + (180 - b) + (180 - c) = 180$$

$$180 - a + 180 - b + 180 - c = 180$$

$$360 = a + b + c$$

2116.

Detta ger en likbent triangel ABC , 20° , 80° , 80°

Triangeln ACD är likbent, 80° , 50° , 50°

Använd den ledtråd som finns i facit.

Då blir även triangeln AFE är likbent, 100° , 40° , 40°

$AC=AF$ ger att $AD=AF$ och ADF är liksidig.

Då $\sphericalangle AFE = 100^\circ$ och $\triangle AFE$ är likbent dvs $AF=EF=DF$.

$\triangle FDE$ är likbent 40° , 70° , 70° så fås $\sphericalangle DEA = 30^\circ$

2211. Den andra kateten är $\sqrt{87.5^2 - 84.4^2} \approx 23.1$ cm

Kalla kvadratens sida x . Då gäller:

$$\frac{84.4}{23.1} = \frac{84.4-x}{x} \Rightarrow 84.4x = 23.1(84.4 - x) \Rightarrow x = \frac{23.1 \cdot 84.4}{84.4+23.1} \approx 18.1 \text{ cm}$$

$$2223. 1:2:5 \Rightarrow \frac{l_1^3}{l_2^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow l_1^3 = \frac{l_2^3}{2} \Rightarrow l_1 = \sqrt[3]{\frac{l_2^3}{2}} \approx 20 \text{ cm}$$

$$1:2:5 \Rightarrow \frac{l_3^3}{l_2^3} = \frac{5}{2} \Rightarrow l_3^3 = l_2^3 \frac{5}{2} \Rightarrow l_3 = \sqrt[3]{\frac{5}{2} l_2^3} \approx 34 \text{ cm}$$

$$2224. (3x)^2 = x^2 + 56 \Rightarrow x^2 = \frac{56}{8} \Rightarrow 9x^2 = 63 \text{ cm}^2$$

$$2225. a) (3x)^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$$

$$\left(2.7 \cdot 0.9 \frac{1}{3}\right)^3 = 0.53 \text{ dm}^3 \Rightarrow x =$$

$$b) \left(3 \cdot 0.9^{(n-1)} \frac{1}{3}\right)^3 > 0.001 \Leftrightarrow 0.9^{(n-1)} > 0.1 \Rightarrow n > 1 + \frac{\lg 0.1}{\lg 0.9}$$

22 dockor

2235.

$$\frac{15+x}{30} = \frac{x}{12} \Rightarrow 12(15+x) = 30x \Rightarrow x = 10$$

Den blå arean kan man hitta genom att söka de två vertikala kateterna:

Den korta: $\sqrt{12^2 - 10^2} \approx 6.6$. Den långa $\sqrt{30^2 - 25^2} \approx 16.6$.

$$A_{\text{blå}} = \frac{\sqrt{30^2 - 25^2} \cdot 25}{2} - \frac{\sqrt{12^2 - 10^2} \cdot 10}{2} \approx 174 \text{ cm}^2$$

$$2236. \text{ Hela höjden } h = 20 \text{ om } \frac{3}{5}h = 12 \Rightarrow BC = \sqrt{9.4^2 + 20^2} \approx 22 \text{ cm}$$

$$2237. \frac{y-x}{a} = \frac{y}{b} \Rightarrow b(y-x) = ay \Rightarrow by - ay = xb \Rightarrow y = x \frac{b}{b-a}$$

2244. Se uppgift 2246. $x = 20^\circ$ och $y = 110^\circ$

2245. Enligt randvinkelsatsen är $2x + 2v = 180^\circ \Rightarrow x + v = 90^\circ \Rightarrow v = 90 - x$

2246. Konstruera 4 likbenta trianglar med toppvinkeln i cirkelns mittpunkt. Kalla vinklarna i mittpunkten α, β, γ och δ . Då gäller för två motstående vinklar i fyrhörningen:

$$\begin{aligned} \frac{180-\alpha}{2} + \frac{180-\beta}{2} + \frac{180-\gamma}{2} + \frac{180-\delta}{2} &= 4 \frac{180}{2} - \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = \\ &= 360 - \frac{360}{2} = 180^\circ \end{aligned}$$

$$2247. a) 180 - y + 2x = 180 \Rightarrow y = 2x$$

b) Kalla de spetsiga vinklarna i den streckade triangeln för a . Då gäller:

$$180 - 2\alpha - y + 2(x + \alpha) = 180 \Rightarrow y = 2x$$

$$2461. y(x) = ax^2 + bx + c, y(-2) = 20, y(1) = 20, y(3) = 0$$

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 20 \\ a + b + c = 20 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a + 3c = 60 \\ a + b + c = 20 \\ 6a - 2c = -60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5c = 120 \\ a + b + c = 20 \\ 6a = 2c - 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 24 \\ b = -2 \\ a = -2 \end{cases}$$

2254. a) Enligt kordasatsen gäller $a \cdot b = c \cdot d \Rightarrow x \cdot x = h(2R - h)$

$$b) \left(\frac{s}{2}\right)^2 = h2R \Rightarrow h = \frac{s^2}{8R} = \frac{128^2}{8 \cdot 6370} \approx 320 \text{ m}$$

2255. Figuren är något dåligt ritad. Den stora triangeln är likbent och man upptäcker att $a + b = 27$ (de små triangelarna är troligen menade att vara likbenta) dvs: $\frac{27}{16} = \frac{16}{a} \Rightarrow a = \frac{256}{27} \approx 9.5$ och $b = 17.5$. Längderna 16 och 27 är approximativa och det är sannolikt att problemkonstruktören tänkt sig att $x = 36^\circ$.

2308.

Mittpunkten $M = \left(\frac{4+2a}{2}, \frac{8+4}{2}\right) = (2+a, 6)$.

Avståndet till C i kvadrat: $196 = (2+a-6)^2 + (6-a)^2 \Rightarrow$

$$196 = (a-4)^2 + (6-a)^2 = (a^2 - 8a + 16) + (36 - 12a + a^2)$$

$$196 = 2a^2 - 20a + 52 \Rightarrow a^2 - 10a - 72 = 0$$

$$a = 5 \pm \sqrt{25 + 72} = 5 \pm \sqrt{97} \approx \begin{cases} 14.8 \\ -4.85 \end{cases} \text{ med 3 värdesiffror.}$$

2325. För att skall $y(5)$ få sitt största värde måste $k = 3$.

Dvs $y(2) = 3 = 3 \cdot 2 + m \Rightarrow m = -3$ och $y(5) = 3 \cdot 5 - 3 = 12$

2326. $y_1 = y_2$ då $a = 0.2ax \Rightarrow x = 5, A_\Delta = \frac{5a}{2} = 10 \Rightarrow a = 4$

2335.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 5}{a - (-3)} = \frac{-3}{a + 3}$$

Vi har punkterna $(-3, 5)$ och $(7, 0)$. Detta ger två ekvationer:

$$\begin{cases} 5 = \frac{-3}{a+3}(-3) + m \\ 0 = \frac{-3}{a+3}7 + m \end{cases} \text{ {övre minus undre} } \Rightarrow 5 = \frac{9+21}{a+3} \Rightarrow a = 3 \Rightarrow m = 14$$

2336.

$$y = kx + m \Rightarrow -39 = -2.5 \cdot (-14) + m \Rightarrow m = -74$$

$$a = -2.5 \cdot 2 - 74 \Rightarrow a = -79$$

2337.

Punkterna linjen går genom är $(5, 7.5)$ och $(12, 13.1)$. Vi får direkt:

$$k = \frac{13.1-7.5}{12-5} = 0.8 \frac{\text{kg}}{\text{l}} \text{ dvs 1 liter väger 0.8 kg.}$$

$$7.5 = 5 \cdot 0.8 + m \Rightarrow m = 3.5 \text{ kg}$$

2351.

$$B = (3a, 0) \text{ och } A = (0, a)$$

$$y = kx + m = \frac{0 - a}{3a - 0}x + a = -\frac{1}{3}x + a$$

$$3 = -\frac{1}{3} \cdot 2 + a \Rightarrow a = \frac{11}{3}$$

2352. De två linjerna kan skrivas:

$$\begin{cases} y_1 = 1 - x \\ y_2 = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow y_1 = y_2 \text{ då } 1 - x = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\text{Arean är } A = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \frac{11}{2 \cdot 2} = \frac{1}{12} \text{ ae}$$

2353. a) $0.5x + 6 = x + 1 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow A_{\Delta} = 0.5 \cdot 5 \cdot 10 = 25 \text{ ae}$

b)

$$kx + 6 = x + 1 \Rightarrow x = \frac{5}{1 - k} \Rightarrow A_{\Delta} = 0.5 \cdot 5 \cdot \frac{5}{1 - k} = \frac{12.5}{1 - k} \text{ ae}$$

k måste vara mindre än 1, annars skär inte linjerna varandra i första kvadranten. Ju närmare k kommer 1, desto större blir triangelns area.

2363.

$$k_1 = \frac{0 - 4}{6 - (-2)} = -\frac{1}{2}, k_2 = \frac{8 - (-4)}{5 - (-1)} = 2 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \text{ VSV}$$

2364. $y_1 = x + 3, y_2 = -x + 4$

2365.

$$k_L = \frac{b}{a}, k_M = \frac{-a}{b} \Rightarrow k_L \cdot k_M = \frac{b}{a} \cdot \frac{-a}{b} = -1 \text{ VSV}$$

2378.

$$2y + ax - b = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{2}x + \frac{b}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = 80 \\ a = 12 \end{cases}$$

2379.

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{b}(-ax + c) \\ y_2 = \frac{1}{a}(bx + d) \end{cases} \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = \frac{-a}{b} \cdot \frac{b}{a} = -1 \text{ VSV}$$

2407. a)

$$\begin{cases} y = 4x \\ 5x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x - 8x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ 6x - 3y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow -3y + 3y - 3 - 12 = -15 = 0$$

Saknar lösning!

2407. a) klockan 13:00 b) 360 km c) klockan 8:30 d) 90 km

2409. a)

$$k = \frac{5 - (-1)}{2 - (-4)} = 1, y = x + m, m = 3, y = x + 3$$

b)

$$y = \frac{x}{2} + m, 5 = \frac{2}{2} + m, m = 4, y = \frac{x}{2} + 4$$

2417.

$$\begin{cases} 3x + ay = 5 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 + ay = 5 \\ 6 - 3y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ay = -4 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 4$$

2418.

$$\begin{cases} x + ay = 5 \\ 3x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + ay = 5 \\ -3ay = 2y - 15 \end{cases} \Rightarrow y(2 + 3a) = 15$$

saknar lösning då $a = -\frac{2}{3}$

2419.

$$\begin{cases} x + 2y = 23 \\ xy = 65 \end{cases} \Rightarrow \frac{65}{y} + 2y = 23 \Rightarrow 65 + 2y^2 = 23y \Rightarrow y^2 - \frac{23}{2}y + \frac{65}{2} = 0$$

$$y = \frac{23}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{23}{4}\right)^2 - \frac{65}{2}} = \frac{23}{4} \pm \sqrt{\frac{529}{16} - \frac{8 \cdot 65}{8 \cdot 2}} = \frac{23}{4} \pm \frac{3}{4} = \begin{cases} y_1 = 6.5 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 13 \end{cases}$$

2431.

$$(x - 2)(x - 5) = x^2 - 7x + 10 = 0 \text{ dvs } \begin{cases} \frac{4}{a} = -7 \\ \frac{b}{a} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{7} \\ b = -\frac{40}{7} \end{cases}$$

2432.

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 7 \\ \frac{2y}{3} + \frac{x}{4} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 42 \\ 3x + 8y = -12 \end{cases} \Rightarrow 8y + 4.5y = -12 - 1.5 \cdot 42 \Rightarrow$$
$$12.5y = -75 \Rightarrow \begin{cases} y = -6 \\ x = 12 \end{cases}$$

2438. a)

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases} \Rightarrow 0 = x + 4 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -7 \end{cases}$$

b) $-6 < k < 2$

c) $k < -6$

2439.

$$\begin{cases} y = a^2x + a \\ y = 15x - 2ax + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = a^2x + a \\ y = x(15 - 2a) + 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a^2 = 15 - 2a \Rightarrow a^2 + 2a - 15 = 0 \Rightarrow a = -1 \pm \sqrt{1 + 15} = -1 \pm 4$$

$x = 3$ ger sammanfallande linjer, $x = -5$ ger parallella linjer.

2452.

$$\begin{cases} 3800 = k6 + m \\ 3750 = 1.2k5 + 0.9m \end{cases} \Rightarrow 3750 - 0.9 \cdot 3800 = 1.2k5 - 0.9k6 \Rightarrow$$

$$330 = 0.6k \Rightarrow \begin{cases} k = 550 \text{ kr/h} \\ m = 500 \text{ fast} \end{cases}$$

2453.

$$\begin{cases} 2a + 2b = 398 \\ ab = 9660 \end{cases} \Rightarrow a + \frac{9660}{a} = 199 \Rightarrow a^2 - 199a + 9660 = 0$$
$$a = 99.5 \pm \sqrt{99.5^2 - 9660} = 99.5 \pm 15.5 = \begin{cases} 115 \text{ m} \\ 84 \text{ m} \end{cases}$$

2454.

$$\begin{cases} 0 = C \\ 8 = 4A + 2B + C \\ 36 = 9A + 3B + C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = C \\ 8 = 4A + 2B + C \\ 36 = 9A + 3B + C \end{cases} \Rightarrow 36 - \frac{9}{4}8 = 3B - \frac{9}{4}2B$$

$$18 = 3B - 4.5B \Rightarrow B = -12 \Rightarrow A = 8$$

2455.

$$\begin{cases} \tan 22.8 = \frac{x}{y + 100} \\ \tan 28.6 = \frac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow y \tan 28.6 = (y + 100) \tan 22.8 \Rightarrow$$

$$y(\tan 28.6 - \tan 22.8) = 100 \tan 22.8 \Rightarrow y \approx 337 \text{ m}, x \approx 184 \text{ m}$$

2461.

$$\begin{cases} 20 = 4a - 2b + c \\ 20 = a + b + c \\ 0 = 9a + 3b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20 - 4 \cdot 20 = -2b - 4b + c - 4c \\ -9 \cdot 20 = 3b - 9b + c - 9c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 60 = 6b + 3c \\ -180 = -6b - 8c \end{cases} \Rightarrow -120 = -5c \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \\ c = 24 \end{cases}$$

2462. Ur figuren kan följande samband direkt skrivas upp:

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ x + z = 73 \\ y + z = 67 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z - y = 37 \\ z + y = 67 \end{cases} \Rightarrow 2z = 104 \Rightarrow \begin{cases} x = 21 \text{ cm} \\ y = 15 \text{ cm} \\ z = 52 \text{ cm} \end{cases}$$

Test i kapitel 2

14. Alla triangelns sidor är $2s$.

Höjden mot den horisontella sidan blir med hjälp av Pythagoras

$$h^2 = 4s^2 - s^2 = 3s^2 \Rightarrow h = \sqrt{3}s$$

Hela triangelns area fås som:

$$A = 2 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = s\sqrt{3}s = \sqrt{3}s^2 \text{ a. e.}$$

23. Pythagoras ger direkt:

$$(PT)^2 + r^2 = (PR + r)^2 \Rightarrow 144 + r^2 = 64 + 16r + r^2 \Rightarrow 144 = 64 + 16r \Rightarrow r = 5 \text{ cm}$$

27.

$$\begin{cases} 2y - 4x = 1 \\ 6x + 4 + ay = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 4x + 1 \\ ay = -6x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 0.5 \\ y = -\frac{6}{a}x - \frac{4}{a} \end{cases}$$
$$-\frac{6}{a} = 2 \Rightarrow a = -3$$

30. Kalla rektangelns sidor för $a + b$ och $c + d$, detta ger:

$$\begin{cases} 210^2 = a^2 + d^2 \\ 110^2 = b^2 + d^2 \\ 180^2 = a^2 + c^2 \\ x^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 210^2 - 110^2 = a^2 - b^2 \\ 180^2 - x^2 = a^2 - b^2 \end{cases} \Rightarrow x = 20$$

Blandade uppgifter i kapitel 2

28. Hypotenusan blir $\sqrt{35^2 + 84^2} = 91 \text{ cm}$

$$\frac{91 - x}{42} = \frac{84}{91} \Rightarrow 91(91 - x) = 84 \cdot 42 \Rightarrow x \approx 52 \text{ cm}$$

29.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y - z = 4 \\ x - z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ z = y - 4 \end{cases} \Rightarrow 3 - y - (y - 4) = 9 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 4 \\ z = -5 \end{cases}$$

30.

a)

$$y = \frac{70 - 46}{75}x + 46 = 0.32x + 46$$

b)

$$0.32x + 46 = 0.053x + 76 \Rightarrow x(0.32 - 0.053) = 76 - 46 \Rightarrow x = \frac{30}{0.267} \approx 112$$

dvs år 2012.

31.

$$\begin{cases} y_a = 0.8x - 6 \\ y_b = -0.4x + 10 \\ y_c = -0.16x - 4 \end{cases}$$

32.

$$\frac{y}{2x} = \frac{12}{3x} \Rightarrow y = 8 \text{ eller } \frac{y}{3x} = \frac{12}{2x} \Rightarrow y = 18$$

33. a) $(6^2 - 2^2)$, $2 \cdot 6 \cdot 2$ och $(6^2 + 2^2)$ dvs 32, 24 och 40.

b)

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 26 \\ 2nm = 10 \Rightarrow 2m^2 = 50 \Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = 1 \end{cases} \\ m^2 - n^2 = 24 \end{cases}$$

c)

$$(m^2 - n^2)^2 + (2nm)^2 = (m^2 + n^2)^2 \Rightarrow$$

$$m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \Rightarrow \text{VSV}$$

34. Kalla x -koordinaten för x_1 . Då blir den sökta punkten $(x_1, 2x_1)$. Om dess avstånd till origo = 24 fås $x_1^2 + (2x_1)^2 = 24^2 \Rightarrow 5x_1^2 = 576 \Rightarrow x_1 = \sqrt{115.2} \approx 10.7$

35.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{70 - 50}{180 - 155} = \frac{20}{25} = 0.8$$

$$y - y_1 = k(x - x_1) \Rightarrow y - 50 = k(x - 155) \Rightarrow y = 0.8x - 74$$

$$y(5) = 0.8 \cdot 5 - 74 = -70$$

36.

$$\begin{cases} ax + 3y - 9 = 0 \\ 8x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = -ax + 9 \\ 2y = 8x - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{a}{3}x + 3 \\ y = 4x - 3 \end{cases} \Rightarrow -\frac{a}{3} = 4 \Rightarrow a = -12$$

37. $ax - y + a + 2 = 0 \Rightarrow y = ax + a + 2 \Rightarrow (0, a + 2)$ och $(-1, 2)$

38.

$$\begin{cases} px + y = p^2 \\ x + py = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -px + p^2 \\ y = -\frac{1}{p}x + \frac{1}{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{en lösning: } p \neq 1, p \neq -1 \\ \text{ingen lösning: } p = -1 \\ \text{oändligt antal: } p = 1 \end{cases}$$

39. $(a - 5)^2 + (-3 - 2a)^2 = 64 \Rightarrow a^2 - 10a + 25 + 9 + 12a + 4a^2 = 64 \Rightarrow$

$$5a^2 + 2a - 30 = 0 \Rightarrow a^2 + 0.4a - 6 = 0 \Rightarrow a = -0.2 \pm \sqrt{0.04 + 6} \Rightarrow$$

$$a = \begin{cases} 2.26 \\ -2.66 \end{cases}$$

40.

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ z + 8(y + z) - 9(x - z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 25 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ -9x + 8y + 18z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6y + z = -50 \\ 17y + 18z = 225 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(17 + 18 \cdot 6)y = 225 + 50 \cdot 18 \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 9 \\ z = 4 \end{cases}$$

41.

$$\begin{cases} 17000 = 5k + m \\ 16000 = 4 \cdot 1.25k + 0.8m \end{cases} \Rightarrow 0.2m = 1000 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2400x + 5000 \\ y_{ny} = 3000x + 4000 \end{cases}$$