Övningsuppgifter i Matematik 4

Integraler, differentialekvationer och primitiva funktioner

Uppgifterna är tagna från NP Ma D vt 2005.

1. Beräkna $\int_1^3 (x^2 - 1)\,dx$

3. Vilka två av funktionerna $F(x)$ nedan är primitiv funktion till $f(x) = 3x^5 + 1$? *Endast svar fordras*

A $F(x) = \frac{3x^4}{4}$

B $F(x) = 15x^4$

C $F(x) = 0{,}5x^6 + x$

D $F(x) = x^6 + 2x$

E $F(x) = \frac{x^6}{3} + x + 1$

F $F(x) = \frac{x^6}{2} + x - 14$

7.

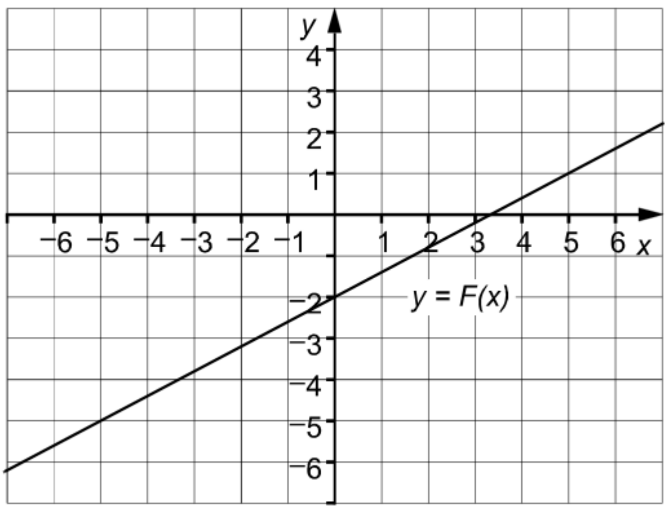
Antalet starar i Sverige har undersökts sedan 1979. Resultaten av denna undersökning kan matematiskt beskrivas med differentialekvationen:

$\frac{dy}{dt} = -\,0{,}03 \cdot y$, där y är antalet starar vid tiden t år från 1979.

Förklara med egna ord innebörden av differentialekvationen i detta sammanhang.

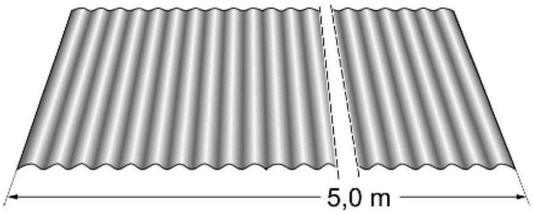
9. Funktionen F är primitiv funktion till f
Figuren nedan visar $y = F(x)$

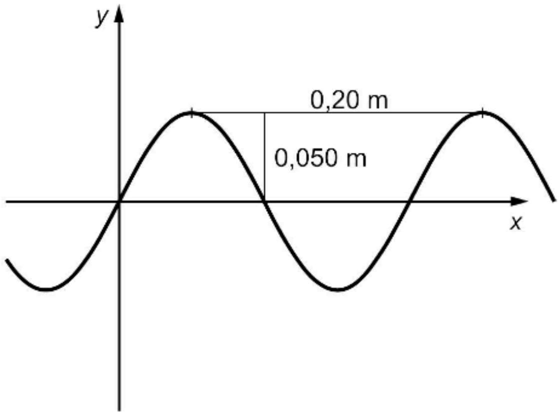
Bestäm $\int_0^5 f(x)\,dx$



11. Beräkna med hjälp av primitiv funktion arean av det område som begränsas av funktionerna $f(x) = x^2 + x + 1$ och $g(x) = 9 - x$

15. En korrugerad plåt tillverkas genom att en plan plåt veckas. Sedd från sidan har den korrugerade plåten på bilden formen av en sinuskurva med perioden 0,20 m och amplituden 0,050 m.

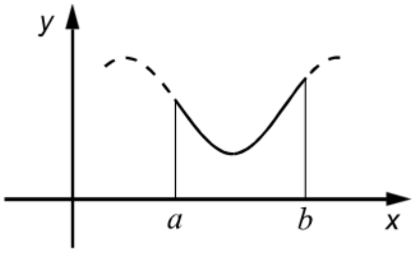




a) Bestäm en formel för ”plåtkurvan” på formen $f(x) = A\sin kx$

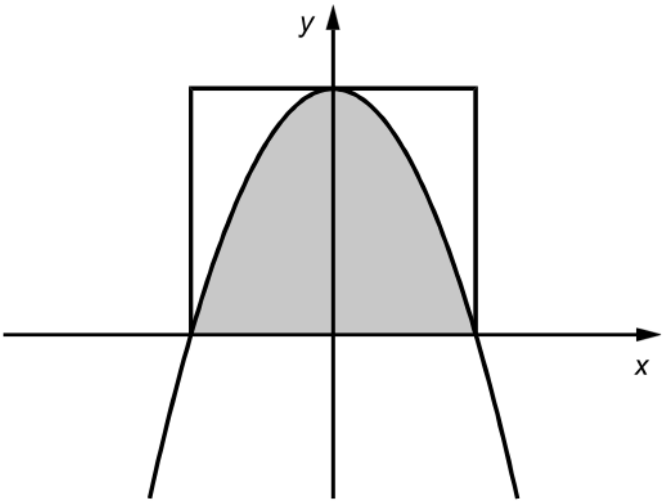
Det finns en formel för beräkning av kurvlängd. Enligt denna gäller att längden s av en kurva $y = f(x)$ från $x = a$ till $x = b$ kan beräknas som:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$



b) Hur lång *plan* plåt ska man utgå ifrån för att den korrugerade plåtens längd ska bli 5,0 m?

17. Figuren visar en parabel och en rektangel i ett koordinatsystem. Det skuggade området är begränsat av parabeln och x-axeln. Arean av det skuggade området kallas i fortsättningen parabelarean.



Två av rektangelns hörn sammanfaller med kurvans skärningspunkter med x-axeln.
En av rektangelsidorna tangerar kurvans maximipunkt.

I den här uppgiften ska du undersöka förhållandet mellan parabelarean och rektangelarean.
Låt parabelns ekvation vara $y = b - ax^2$, där a och b är positiva tal.

- Du kan då börja t.ex. med att sätta $b = 9$ och $a = 1$ och rita grafen till funktionen $y = 9 - x^2$. Bestäm därefter förhållandet mellan parabelarean och rektangelarean.

- Välj själv andra exempel och försök formulera en slutsats utifrån dina valda exempel.

- Undersök om din slutsats även gäller i det allmänna fallet med parabeln $y = b - ax^2$

Om du vill kan du istället undersöka det allmänna fallet direkt.

Facit

1. 20/3

3. C och F

7. Antalet starar har sedan år 1979 minskat med 3 % per år av det aktuella antalet.

9. Använd först figuren till att bestämma $F(x) = \frac{3}{5}x - 2$. Detta är en primitiv funktion till *f*, så $\int_0^5 f(x)dx = \left[\frac{3}{5}x - 2\right]_0^5 = 3$.

11. 36

15. a) $f(x) = 0{,}050 \sin(10\pi x)$

b) $f'(x) = 0{,}5\pi \cos(10\pi x)$ så den plana plåtens längd ges av integralen

$$\int_0^5 \sqrt{1 + (0{,}5\pi \cos(10\pi x))^2}\, dx$$

Denna integral vet vi inte hur man beräknar exakt, så vi använder t.ex. GeoGebra:

Integral[sqrt(1+(0.5π*cos(10π*x))^2), 0, 5] ≈ 7.3

Svar: 7,3 m

17.

$$y = b - ax^2 \qquad b > 0,\ a > 0$$

$$y = -ax^2 + b \qquad y = 0;\quad x^2 - \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Parabelarean:

$$2 \cdot \int_0^{+\sqrt{\frac{b}{a}}} (b - ax^2)\,dx = 2\left[bx - \frac{ax^3}{3}\right]_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} =$$

$$= \left(b \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{a \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}^3}{3} - 0\right) \cdot 2 = 2b\sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{b}{a}}^3$$

Rektangelarean:

$2\sqrt{\frac{b}{a}}$ gånger $y = ?$ i maxpunkten.

Maxpunkten ligger alltid på $x = 0$ (där derivatan är noll), alltså:

$$2 \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot (-a \cdot 0^2 + b) = 2 \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot b$$

Förhållandet mellan R_{area} och P_{area} är:

$$\frac{2 \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot b}{2b \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{b}{a}}^3} = \frac{2\cancel{\sqrt{\frac{b}{a}}} \cdot b}{\cancel{\sqrt{\frac{b}{a}}}\left(2b - \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{b}{a}}^2\right)} =$$

$$= \frac{2b}{2b - \frac{2}{3}a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{2b}{2b - \frac{2}{3}\cancel{a} \cdot \frac{b^2}{a^2}} = \frac{2\cancel{b}}{\cancel{b}\left(2 - \frac{2}{3}\frac{b}{a}\right)} =$$

$$= \frac{2}{2 - \frac{2}{3}\frac{b}{a}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{b}{a}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}\frac{b}{a}}$$

Svar: Förhållandet är $\dfrac{1}{1 - \frac{1}{3}\frac{b}{a}}$