

Uppgift nr 1 (3249)

1/0

Lös differentialekvationen $y' = 4y$

Endast svar fordras

Uppgift nr 5 (3448)

2/0

Differentialekvationen $y' = x^2 + y^2$ har en lösning y som uppfyller villkoret $y(1) = 0$

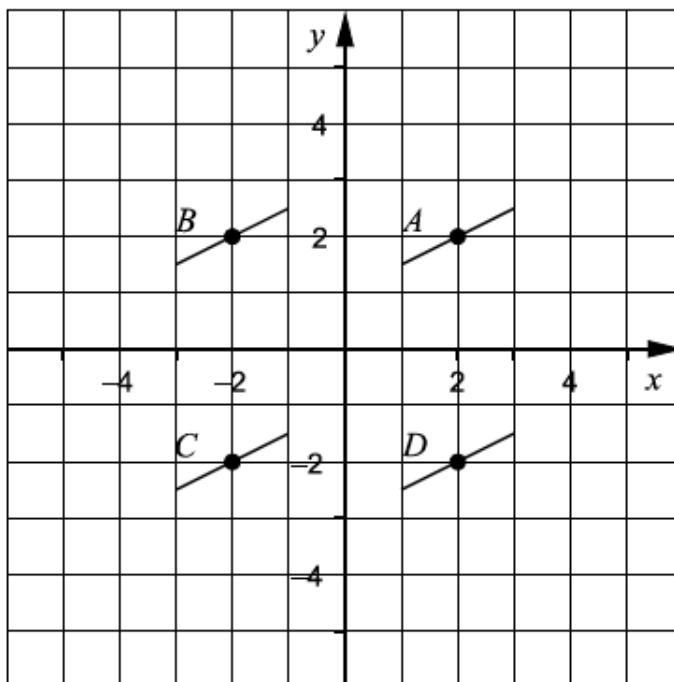
Bestäm ett närmevärde till $y(3)$ med hjälp av en numerisk metod, till exempel Eulers stegmetod. Välj steglängden 1.

Uppgift nr 6 (3133)

0/1

Differentialekvationen $y' + \frac{y}{2x} = 0$ har lösningskurvor som går genom punkterna

A , B , C och D i nedanstående figur. I var och en av dessa har tangentens riktning markerats. I två av punkterna är tangentens riktning felaktigt markerad.



I vilka två punkter är tangentens riktning felaktigt markerad?

Endast svar fordras

Uppgift nr 12 (3091)

3/0

Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 2y' - 8y = 0$ som uppfyller villkoren $y(0) = 4$ och $y'(0) = 2$

Uppgift nr 15 (2577)

1/0 , 0/2 , 0/1

En sjö har under en lång tid förorenats av utsläpp från en fabrik. Detta har medfört att det nu finns cirka 500 kg föroreningar i sjön.

Fabriken släpper ut cirka 100 kg föroreningar per år. Via ett vattendrag försvinner årligen 10 % av mängden föroreningar från sjön.

För att studera hur mängden föroreningar (y kg) i sjön förändras med tiden (t år) går det att använda en matematisk modell i form av följande differentialekvation:

$$\frac{dy}{dt} = 100 - 0,1y \quad \text{och} \quad y(0) = 500$$



- Förklara hur $\frac{dy}{dt} = 100 - 0,1y$ hänger ihop med förutsättningarna i texten.
- Lös differentialekvationen då $y(0) = 500$
- Vad händer enligt modellen med mängden föroreningar i sjön i ett längre tidsperspektiv?

Lösningar

Uppgift nr 1 (3249)

$$y' = 4y$$

$$y' - 4y = 0$$

$$y = C \cdot e^{4x}$$

SVAR: $y = C \cdot e^{4x}$

Uppgift nr 5 (3448)

$$y' = x^2 + y^2$$

$$y(1) = 0$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot y'_n$$

Eulers stegmetod där $h = 1$ ger

| n | x | y | y' |
|-----|-----------|-------------------|-----------------|
| 0 | 1 | 0 | $1^2 + 0^2 = 1$ |
| 1 | $1+1 = 2$ | $0+1 \cdot 1 = 1$ | $2^2 + 1^2 = 5$ |
| 2 | $2+1 = 3$ | $1+1 \cdot 5 = 6$ | |

SVAR: $y(3) \approx 6$

Uppgift nr 12 (3091)

$$y'' + 2y' - 8y = 0$$

$$r^2 + 2r - 8 = 0$$

$$r = -1 \pm 3$$

$$r_1 = -4 \text{ och } r_2 = 2$$

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x}$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 4$$

$$y' = -4C_1 e^{-4x} + 2C_2 e^{2x}$$

$$y'(0) = -4C_1 + 2C_2 = 2$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4C_1 + 2C_2 = 2 \end{cases}$$

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = 3$$

Uppgift nr 15 (2577)

a)

SVAR:

Varje år förändras mängden föroreningar i sjön genom att 100 kg föroreningar tillförs från fabriken och 10 % av den aktuella mängden föroreningar följer med vattnet ut ur sjön.

b)

$$\frac{dy}{dt} + 0,1y = 100$$

har lösningen $y = Ce^{-0,1t} + 1000$

$$y(0) = 500 \Rightarrow C = -500$$

$$y(t) = 1000 - 500e^{-0,1t}$$

SVAR: $y(t) = 1000 - 500e^{-0,1t}$

c)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 1000 - 500e^{-0,1t} = 1000$$

SVAR:

Massan kommer att stabilisera sig kring 1000 kg