En samling NP-uppgifter för Ma3C

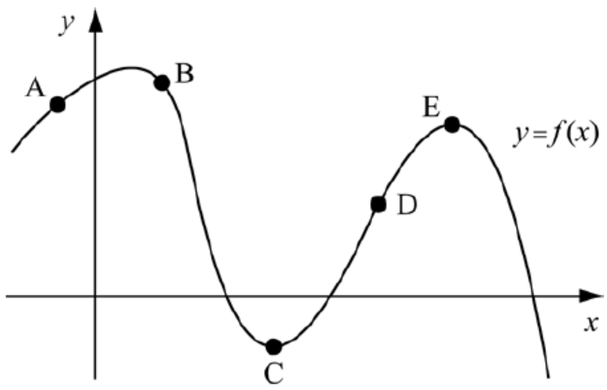
Uppgifterna har hämtats från gamla NP ht-2006 Prov C och D

1. Derivera

a) $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 8$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) $f(x) = \dfrac{x}{4}$ *Endast svar fordras* (1/0)

3. Figuren visar kurvan $y = f(x)$. Fem punkter A-E är markerade på kurvan.



a) I vilken av de markerade punkterna är derivatan negativ?
Endast svar fordras (1/0)

b) I vilken av de markerade punkterna har derivatan sitt största värde?
Endast svar fordras (1/0)

5. Funktionen $f(x) = x^4 - 32x$ har endast en extrempunkt.

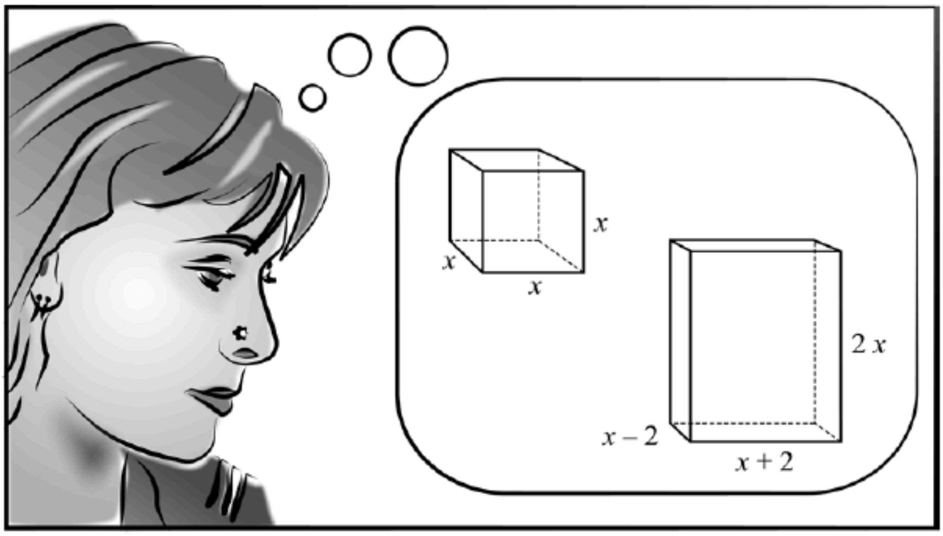
a) Bestäm x-koordinaten för denna extrempunkt. (2/0)

b) Undersök om denna extrempunkt är en maximi - eller minimipunkt. (1/0)

6. För funktionen f gäller att $f(x) = e^x + 2$
Bestäm koordinaterna för den punkt på funktionens graf där $f'(x) = e$ (0/2)

7. Ebba har en kub med sidan 3 cm. Genom att öka en sida med 2 cm, minska den andra med 2 cm och slutligen fördubbla den tredje sidan får hon ett rätblock. Hon beräknar volymerna och konstaterar att rätblocket har större volym än kuben.

Ebba vill därför veta om det finns något mått x på kubens sida som gör att rätblockets volym blir lika stor som kubens volym. Hon förändrar sidorna på samma sätt som tidigare, dvs. enligt figuren nedan.



a) Hjälp Ebba genom att ställa upp den ekvation som behövs för att hon ska få veta om volymerna kan bli lika stora. *Endast svar fordras* (1/0)

b) Bestäm alla lösningar till denna ekvation. (1/1)

c) Vilket eller vilka värden på x ger svar på det Ebba vill veta? *Endast svar fordras* (1/0)

8. Grafen till $f(x)=\sqrt{2x-1}$ har en tangent i punkten $(5,\ 3)$
Tangentens ekvation är $y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$

a) Vilket värde har $f(5)$? *Endast svar fordras* (1/0)

b) Vilket värde har $f'(5)$? *Endast svar fordras* (0/1)

9. Uttrycket $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x(x+1)}$ är givet.

a) Förenkla uttrycket så långt som möjligt. (0/2)

b) Lös ekvationen $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x(x+1)}=1$ (0/1)

11. Grafen till en andragradsfunktion f har sin maximipunkt för $x=2$
Är värdet för $f'(3)$ positivt, negativt eller noll? Förklara. (1/0)

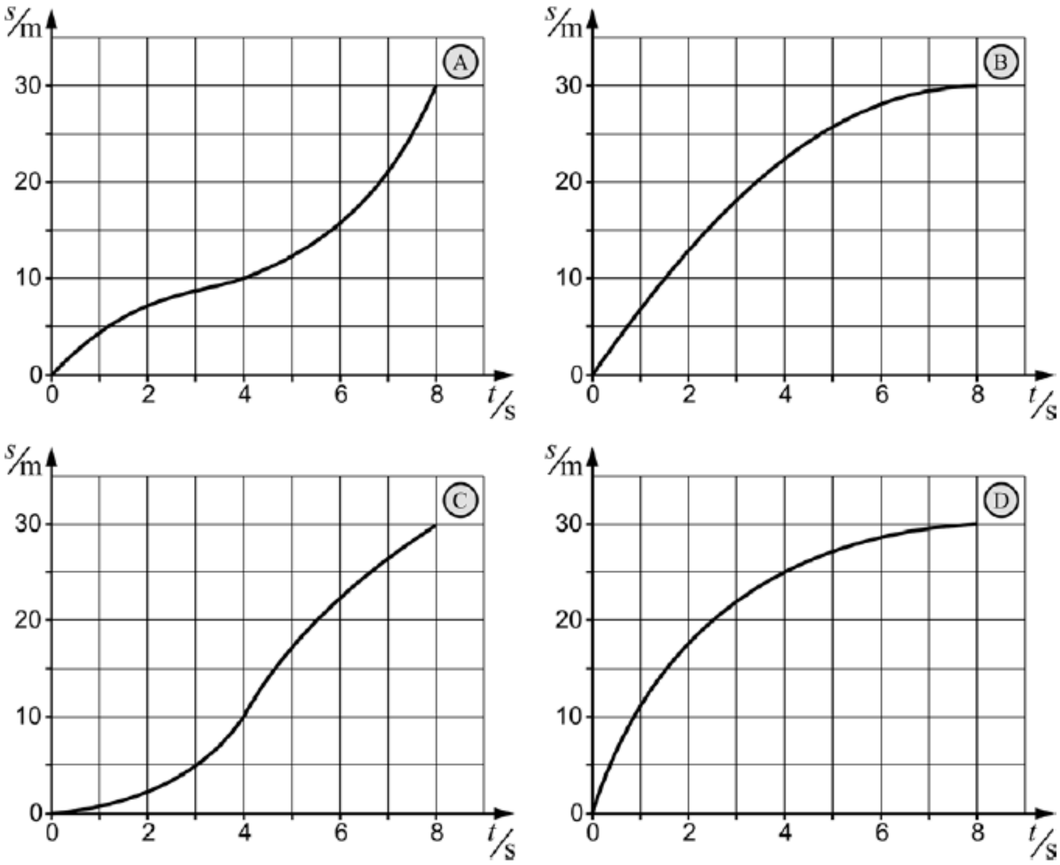
13. Ge ett exempel på en funktion f som har egenskapen $f'(0)=1$
Endast svar fordras (0/1)

14. Gustav är ute på en träningsrunda med sin cykel. Han kommer fram till en uppförsbacke och t sekunder senare har han cyklat $s(t)$ meter uppför backen.

a) Förklara vad $s'(4)$ betyder i detta sammanhang. (1/0)

b) Förklara vad $\dfrac{s(8)-s(0)}{8-0}$ betyder i detta sammanhang. (1/0)

c) Den sträcka som Gustav cyklat efter en viss tid kan beskrivas i ett diagram.
I vilket av diagrammen A-D nedan gäller det att $s'(4) = \dfrac{s(8)-s(0)}{8-0}$?
Förklara. (0/1)

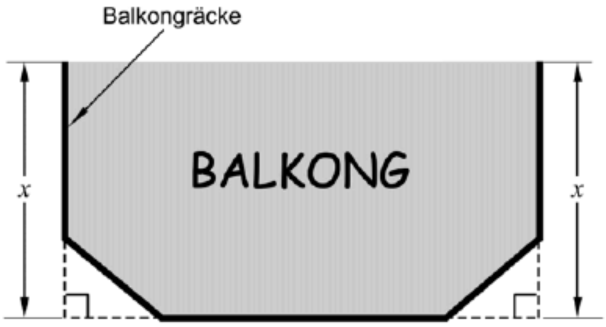


17. För andragradsfunktionen f gäller att $f(x) = k(x-a)(x-b)$
där $f(a) = 0$, $f(b) = 0$ och $k \neq 0$

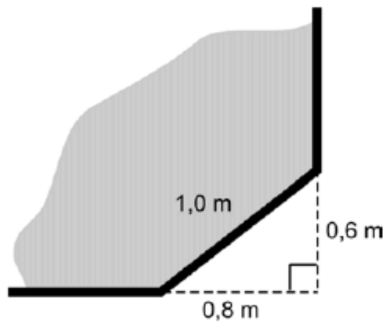
a) Förklara varför $f'(a) + f'(b) = 0$ med ord och enkel figur. (0/1/¤)

b) Visa att $f'(a) + f'(b) = 0$ algebraiskt. (1/2/¤)

18. En arkitekt har fått i uppdrag att ge förslag på hur en balkong ska se ut till ett hus som ska byggas. Han tänker sig att balkongräcket ska bestå av flera delar och där två av delarna ska vara snedställda. Figur 1 visar hur balkongen kan se ut uppifrån.



Figur 1



Figur 2

Arkitekten bestämmer att balkongens area ska vara 6 m^2. Det är den högsta tillåtna arean enligt gällande byggnadslov. Han bestämmer också att de snedställda styckena ska ha längden 1 m och den form som anges av figur 2.

Övriga mått på räcket bestämmer han inte i förväg, utan vill först utreda mellan vilka värden balkongräckets längd kan variera när mått på arean och hörnpartierna är givna.

Arkitekten ställer upp sambandet $L(x) = 2x + \dfrac{6{,}48}{x} - 0{,}8$
som visar hur balkongräckets längd L beror av balkongens djup x m, se figur 1.

- Undersök och beskriv, så utförligt och fullständigt som möjligt, mellan vilka värden balkongräckets längd L kan variera.

- Visa hur arkitekten kom fram till att $L(x) = 2x + \dfrac{6{,}48}{x} - 0{,}8$ (3/4/¤)

Nu kommer det integraler från D-provet

1. Beräkna $\int_1^3 (x^2 - 1)\,dx$ (2/0)

3. Vilka två av funktionerna $F(x)$ nedan är primitiv funktion till $f(x) = 3x^5 + 1$? *Endast svar fordras* (1/0)

A $F(x) = \frac{3x^4}{4}$

B $F(x) = 15x^4$

C $F(x) = 0{,}5x^6 + x$

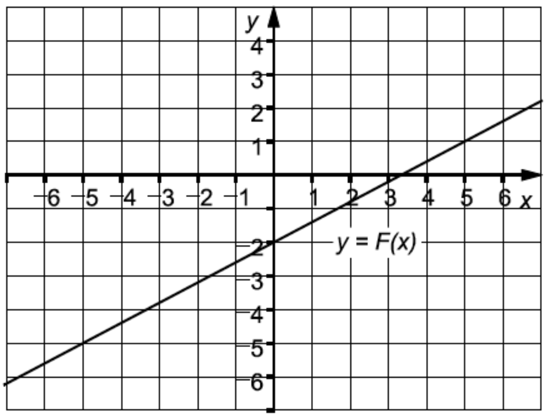
D $F(x) = x^6 + 2x$

E $F(x) = \frac{x^6}{3} + x + 1$

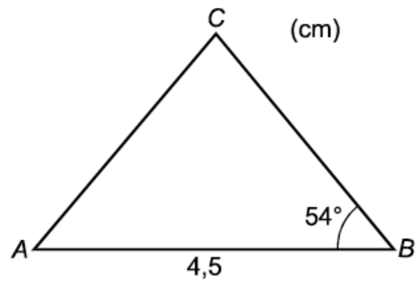
F $F(x) = \frac{x^6}{2} + x - 14$

9. Funktionen F är primitiv funktion till f
Figuren nedan visar $y = F(x)$

Bestäm $\int_0^5 f(x)\,dx$ (0/2/¤)

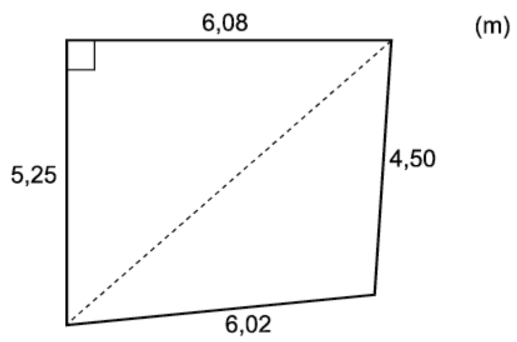


10. I triangeln *ABC* är sidorna *AC* och *BC* lika långa.
Beräkna triangelns area. (2/0)



11. Beräkna med hjälp av primitiv funktion arean av det område som begränsas av funktionerna $f(x) = x^2 + x + 1$ och $g(x) = 9 - x$ (3/0)

12. Daniel och Linda tittar på en lägenhet. Enligt uppgift är vardagsrummet 31,2 m^2. De vill kontrollera om detta stämmer och mäter väggarna och ritar en skiss över rummet. De vet att ett hörn i rummet är rätvinkligt. Så här ser deras skiss ut.

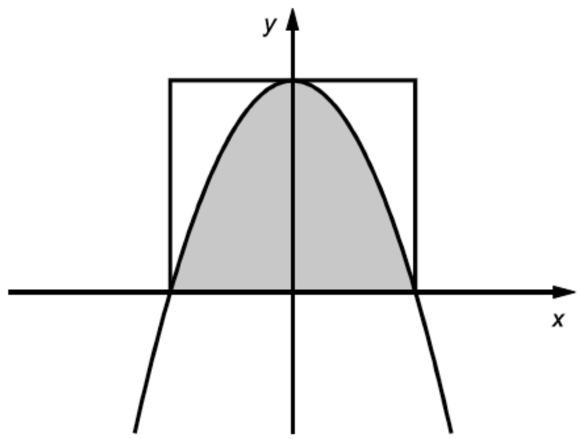


Vilken area har vardagsrummet enligt Daniels och Lindas skiss? (2/2)

Vid bedömning av ditt arbete med uppgiften kommer läraren att ta hänsyn till:

- Hur väl du utför dina beräkningar
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

17. Figuren visar en parabel och en rektangel i ett koordinatsystem. Det skuggade området är begränsat av parabeln och x-axeln. Arean av det skuggade området kallas i fortsättningen parabelarean.



Två av rektangelns hörn sammanfaller med kurvans skärningspunkter med x-axeln.
En av rektangelsidorna tangerar kurvans maximipunkt.

I den här uppgiften ska du undersöka förhållandet mellan parabelarean och rektangelarean.
Låt parabelns ekvation vara $y = b - ax^2$, där a och b är positiva tal.

- Du kan då börja t.ex. med att sätta $b = 9$ och $a = 1$ och rita grafen till funktionen $y = 9 - x^2$. Bestäm därefter förhållandet mellan parabelarean och rektangelarean.

- Välj själv andra exempel och försök formulera en slutsats utifrån dina valda exempel.

- Undersök om din slutsats även gäller i det allmänna fallet med parabeln $y = b - ax^2$

Om du vill kan du istället undersöka det allmänna fallet direkt. (3/4/¤)