Matematik 4 – Övningsuppgifter, del 2

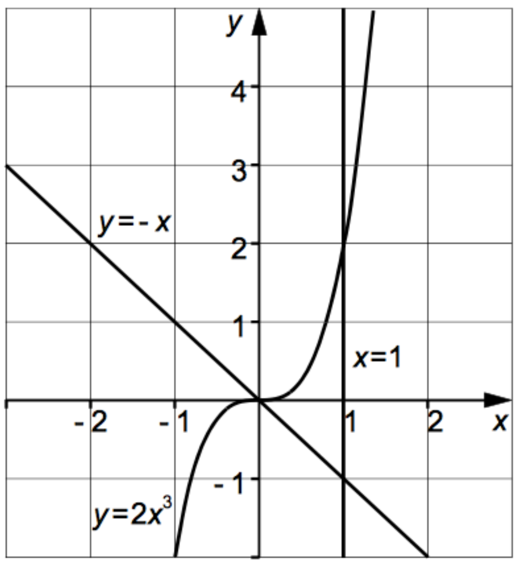
Integraler, differentialekvationer och primitiva funktioner

Dessa uppgifter är tagna från det nationella provet i Ma D vt 2003.

1. Beräkna integralen $\int_0^3 (2x+1)\,dx$

5. En djurpopulation ökar med hastigheten $v(t) = 200 + 50t$ (djur/år) där t är tiden i år. Med hur många djur ökar populationen under de 10 första åren?

6. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan $y = 2x^3$ samt linjerna $y = -x$ och $x = 1$

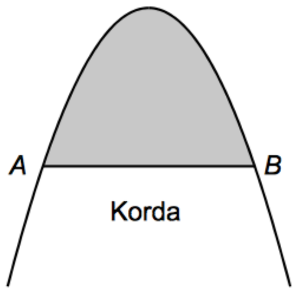


10. Beräkna exakt $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\frac{x}{3}\,dx$

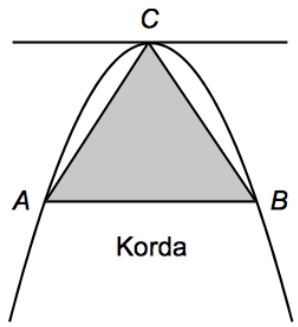
11. Visa att differentialekvationen $y' - 3y = 0$ har lösningen $y = 5e^{3t}$

16. En vågrät linje skär en andragradskurva i två punkter *A* och *B*. Linjen *AB* och andragradskurvan innesluter då ett område. Detta område kallas ett paraboliskt segment. Den tangent till kurvan som är parallell med kordan *AB* tangerar kurvan i *C*.

Den grekiske matematikern, fysikern och uppfinnaren Arkimedes (287 – 212 f Kr) upptäckte att arean av triangeln *ABC* är exakt 3/4 av arean av det paraboliska segmentet (se figurerna nedan).



Paraboliskt segment



Inskriven triangel

- Visa att Arkimedes samband gäller för det paraboliska segment som begränsas av andragradskurvan $y = x(2 - x)$ och x-axeln.

- Välj en annan andragradskurva som skär x-axeln i två punkter.
  Visa att Arkimedes samband gäller för det paraboliska segment som begränsas av denna andragradskurva och x-axeln.

- Andragradskurvan $y = x^2$ skärs av linjen $y = 2x + 3$ i punkterna $A = (-1, 1)$ och $B = (3, 9)$. Sträckan *AB* är en korda till andragradskurvan. Punkten *C* bestäms som ovan av att tangenten till andragradskurvan i *C* ska vara parallell med kordan *AB*.
  Undersök om Arkimedes samband gäller även i detta fall där kordan inte är parallell med x-axeln.

Facit

1. 12

5. 4500

6. 1

10. $\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$

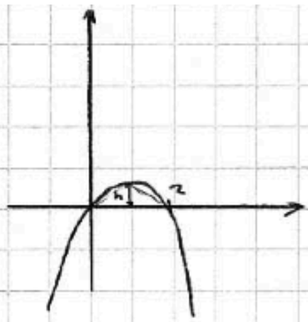
11. VL = $y' - 3y = 15e^{3t} - 3 \cdot 5e^{3t} = 0 = \text{HL}$

16.

$$\left.\begin{aligned} y &= x(2-x) \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x(2-x) = 0$$

$x = 0$ el $2 - x = 0$

$x = 2$



$$\int_0^2 x(2-x)\,dx = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} - (0-0) = \frac{4}{3} \text{ a.e.}$$

Triangelns area

$$\left.\begin{aligned} y' &= 2 - 2x \\ y' &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2 - 2x = 0$$

$x = 1$

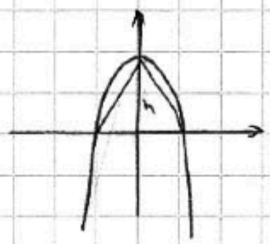
$$\begin{array}{c|ccc} & & 1 & \\ \hline y' & + & 0 & - \\ & \nearrow & & \searrow \end{array}$$

$h = y(1) = 1(2-1) = 1$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(2-0)\cdot 1}{2} = 1 \text{ a.e.}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1 = \text{Triangelns area}$$

$y = 4 - x^2$



$$\left.\begin{array}{l} y = 4 - x^2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 - x^2 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

$$\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 8 - \frac{8}{3} - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) =$$

$$= \frac{32}{3} \text{ a.e.}$$

Triangelns area

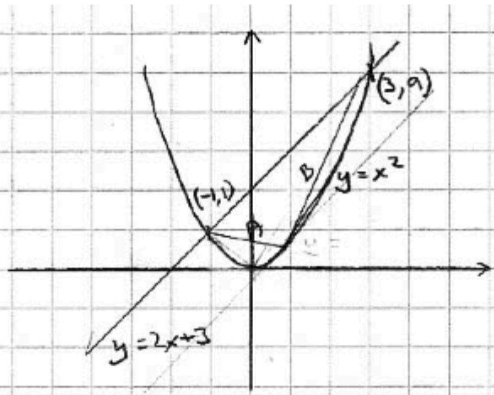
$$\left.\begin{array}{l} y' = -2x \\ y' = 0 \end{array}\right\} \quad -2x = 0, \quad x = 0$$

y': $+$ 0 $-$

$$h = y(0) = 4 - 0^2 = 4$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(2-(-2)) \cdot 4}{2} = 8 \text{ a.e.}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{32}{3} = 8 = \text{Triangelns area}$$



$$\int_{-1}^{3} \left((2x+3)-x^2\right) dx = \int_{-1}^{3} (2x+3-x^2)\,dx = \left[x^2+3x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3} =$$

$$= 9+9-9-\left(1-3+\frac{1}{3}\right) = 9-1+3-\frac{1}{3} = \frac{32}{3} \text{ a.e.}$$

Lutningen för $y=2x+3$

$k = 2$

$$\left.\begin{aligned} y' &= 2x \\ y' &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 2x &= 2 \\ x &= 1 \Rightarrow y = 1^2 = 1 \quad (1,1) \end{aligned}$$

Ekvationen för A

$$k = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

Enpunktsformen:

$$y-1 = 0(x-1)$$

$$y = 1$$

Ekvationen för B

$$k = \frac{9-1}{3-1} = 4$$

Enpuntsformen

$$y-1 = 4(x-1)$$

$$y = 4x-3$$