

Matematik 5 svar till vissa uppgifter i kapitel 1.

Kapitel 1.....	1
Test 1 sidan sid 56 ff.....	7
Blandade Uppgifter	10

Kapitel 1

1105.

1106. $A = \{-1, 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ och $B = \{x \in R, x \leq 0\} \Rightarrow A \cap B = \{-1, 0\}$

1107. A och C .

1109. $A = \{x: x = 2^n, n \in N, n \neq 0\}$

1110. Talet $3 \notin$ de jämna talen alltså är A inte en delmängd av B .

1111. Då p och q tillhör mängden hela tal och $q \neq 0$ blir X mängden av alla rationella tal.

1112.

$$x^2 + 5x + b = 0 \Rightarrow x = -2.5 \pm \sqrt{6.25 - b} \text{ dvs } b > 6.25$$

$$B = \{b \in R: b > 6.25\}$$

1125. $49 + 38 = 87 \Rightarrow 10$ måste ha båda åkommorna och behöver specialishjälp.

1126. $A^C = \{x \in R: x \geq 5\}$

1131. Elementen i A som inte tillhör B dvs: $A \setminus B$

Elementen i A som inte tillhör varken B eller C dvs $A \setminus (B \cup C)$.

1133.

	Inte Pizza	Pizza
Inte hamburgare	20	10
Hamburgare	20	50

1134. Totalt 2000. 80 har högt blodtryck. 85 % av 80 st = 68 dricker alkohol.

	Lågt blodtryck	Högt blodtryck	Totalt
Inte alkohol	768	12	780

Alkohol	$0.6 \cdot 1920 = 1152$	$0.85 \cdot 80 = 68$	1220
Totalt	1920	80	

Av de som dricker alkohol har $\frac{68}{1220} \approx 5.6\%$ högt blodtryck.

1210.

	Fel bara A	Både A och B	Fel bara B	
	$P(A \setminus B)$	$P(A \cap B)$	$P(B \setminus A)$	
Fel A 0.008	0.005	0.003	0.012	Fel B 0.015

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.005 + 0.003 + 0.12 = 0.02$

b) $1 - [P(A) + P(A \cap B) + P(B)] = 1 - 0.02 = 0.98$

c) $P(A \setminus B) + P(B \setminus A) = 0.017$

1211. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow$

$$P(A \cap B) = 0.7 + 0.8 - 0.9 = 0.6$$

1213. De som finns kvar är 47 kort, två av dessa är ess.

$$P(2 \text{ ess på tre kort}) = \frac{2}{47} \cdot \frac{1}{46} \cdot 3 \approx 0.28\%$$

1214. Att inte välja samma siffra mellan 1 och hundra med 25 oberoende försök blir:

$$P(\text{alla 25 tar olika}) = \frac{99}{100} \cdot \frac{98}{100} \cdot \dots \cdot \frac{78}{100} \cdot \frac{77}{100} \cdot \frac{76}{100}$$

Detta ger att minst två val är lika blir $P = 1 - P(\text{alla 25 tar olika}) =$

$$= 1 - \frac{99}{100} \cdot \frac{98}{100} \cdot \dots \cdot \frac{78}{100} \cdot \frac{77}{100} \cdot \frac{76}{100} \approx 0.962$$

1301. $6 \cdot 5 \cdot 2 = 60$ olika sätt.

1302. $3^{13} = 1\,594\,323$ olika rader

1303. $(26 + 26)^4 \cdot 10^2 = 731\,161\,600$ olika koder

1304. Presentatörer: 1 eller 2 personer dvs 2 kombinationer

Illustration: ppt, OH eller tavlan dvs 3 kombinationer

Utvärdering: enkät eller diskussion dvs 2 olika sätt

Totalt $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ olika möjligheter

1305. $1 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4 + 12 + 24 + 24 = 64$ olika kombinationer

1306. $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 36$ olika skyltar.

1307. $5^7 = 78\,125$ olika sätt att välja väg.

1308. I de sju positionerna kan den första inte vara 0 (för då är inte talet 7-siffrigt). De andra positionerna kan innehålla 10 siffror eller 9 om inga treor skall förekomma dvs:

$$\frac{7 - \text{siffriga utan treor}}{\text{alla } 7 - \text{siffriga}} = \frac{8 \cdot 9^6}{9 \cdot 10^6} \approx 47 \%$$

1324.

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

1326. En bonde i varje vågrätt rad. Den första kan ställas på 8 ställen, den andra på 7 osv dvs:
 $8! = 40\,320$

1327. Orden skall vara 5 bokstäver långa (står inte i uppgiften). Hade alla bokstäver varit olika hade det blivit $5! = 120$ olika ord. Nu finns 2 "T" dvs det blir 60 olika ord.

1337. a) 2 ess ur 52 kort: $\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \approx 0.0045$

b) 2 hjärter: $\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{1}{17} \approx 0.059$

1338. 25 kulor totalt.

a) $P_{\text{en av varje}} = \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} \cdot \frac{10}{23} \approx 0.0406$ i en given ordning.

Men alla ordningar gills dvs $6 \cdot P_{\text{en av varje}} \approx 0.2435$

b)

$$P_{\text{ingen blå}} = \frac{18}{25} \cdot \frac{17}{24} \cdot \frac{16}{23} \cdot \frac{15}{22} \approx 0.2419$$

1339. Klassen består av 30 elever, 12 flickor och 18 pojkar. Antalet gynnsamma fall delat med alla möjliga fall blir:

$$\frac{\binom{12}{5}}{\binom{30}{5}} = \frac{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5!}}{\frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{5!}} \approx 0.00556$$

1340. Det är 100 träd av varje sort. Antag att vi väljer ett träd. Chansen att nästa är av samma sort är cirka 0.2 enligt:

$$P(\text{alla olika sorter}) = 1 \cdot \frac{99}{499} \cdot \frac{98}{498} \cdot \frac{97}{497} \cdot \frac{96}{496} \approx 0.00147$$

1341.

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

1342. De 5 raderna med ettor skall väljas bland 13 rader och de 3 raderna med kryss bland de återstående 8 dvs:

$$\binom{13}{5} \cdot \binom{8}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 6 = 72072 \text{ rader}$$

1343. Det totala antalet golv som kan fås med tre färger är $3^{15} = 14348907$.

Antalet gynnsamma kombinationerna kan finnas som $\binom{15}{5} \binom{10}{5} \binom{5}{5} = 756756$

Svar: sannolikheten är:

$$\frac{\text{gynnsamma golv}}{\text{alla golv}} = \frac{756756}{14348907} \approx 0.0257$$

1348. $8x^3 + 3 \cdot 4x^2 3y + 3 \cdot 2x 9y^2 + 27y^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ (fel i facit)

1353.

$$(2x + 5x^3)^8 = \dots + \binom{8-a}{a} (2x)^{8-a} (5x^3)^a + \dots \text{ där } (8-a) + 3a = 10 \Rightarrow a = 1$$

$$\binom{8-1}{1} (2x)^{8-1} (5x^3)^1 = 8 \cdot 2^7 \cdot x^7 \cdot 5x^3 = 40 \cdot 128 \cdot x^{10} = 5120x^{10}$$

1354.

$$\left(5x^2 - \frac{2}{x}\right)^9 = \dots + \binom{9}{b} (5x^2)^{9-b} \left(-\frac{2}{x}\right)^b + \dots = \{2(9-b) - b = 0 \Rightarrow b = 6\} =$$

$$= \dots + \binom{9}{6} (5x^2)^3 \left(-\frac{2}{x}\right)^6 + \dots = \dots + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} 5^3 x^6 \frac{2^6}{x^6} + \dots =$$

$$= \dots + 672000 + \dots$$

1355.

$$n = 4 \Rightarrow 1 \ 3 \ 3 \ 1 \Rightarrow \sum = 8 = 2^3 = 2^{n-1}$$

$$n = 5 \Rightarrow 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \Rightarrow \sum = 16 = 2^4 = 2^{n-1}$$

1356.

$$\begin{aligned}
(2+i)^6 &= \binom{6}{0} 2^6 i^0 + \binom{6}{1} 2^5 i^1 + \binom{6}{2} 2^4 i^2 + \binom{6}{3} 2^3 i^3 + \binom{6}{4} 2^2 i^4 + \binom{6}{5} 2 i^5 + \binom{6}{6} i^6 = \\
&= 2^6 + 6 \cdot 32i - 15 \cdot 16 - 20 \cdot 8i + 15 \cdot 4 + 6 \cdot 2i - 1 = \\
&= 64 - 240 + 60 - 1 + 6 \cdot 32i - 20 \cdot 8i + 6 \cdot 2i = -117 + 44i
\end{aligned}$$

1357. Binomialutveckling ger direkt:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

1358.

a) $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

b) $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$

c) $1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{91}{216}$

d) $\binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72}$

1359.

a) $(0.85)^3 \approx 0.614$

b) $\binom{3}{2} \cdot (0.15)^1 \cdot (0.85)^2 \approx 0.325$

c) $1 - (0.15)^3 \approx 0.997$

1360.

a) $\binom{5}{3} 0.9^3 \cdot 0.1^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} 0.9^3 \cdot 0.1^2 = 0.0729$

b) $\binom{5}{4} 0.9^4 \cdot 0.1^1 + 0.9^5 = 0.9185$

1361.

a) $\binom{10}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \frac{1}{216} \frac{5^7}{6^7} \approx 0.155$

b) $P_{\max 3 \text{ ettor}} = P_0 \text{ ettor} + P_1 \text{ etta} + P_2 \text{ ettor} + P_3 \text{ ettor} =$

$$= \binom{10}{0} \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + \binom{10}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^9 + \binom{10}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 + \binom{10}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0.9303$$

c) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0.8385$

1362.

a) $\binom{10}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 0.2276$

b) $1 - (0 \text{ rätt} + 1 \text{ rätt} + 2 \text{ rätt} + 3 \text{ rätt}) = 0.441$

$$c) \binom{10}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^{10} + \binom{10}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^9 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \approx 0.0356 \%$$

1364. a) Binomialfördelningen för 8 försök ger för k klave:

$$\binom{8}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{8-k} = \binom{8}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

b)

$$\binom{8}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2^8} = 56 \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{7}{32} \approx 22 \%$$

Test 1 sidan sid 56 ff

1. a) R (de reella talen) är en delmängd av C (de komplexa talen): SANN

b) $5 + 3i$ är ett komplext tal och ingår inte i de reella talen: FALSK

c) Talet 1 ingår i de komplexa talen: SANN

d) talparet $\{1, i\}$ ingår i de komplexa talen: SANN

3. Position 1 och 2 har 10 möjligheter var och position 3 har 5 möjligheter. $10 \cdot 10 \cdot 5 = 500$

4. Första positionen kan ha 5 olika, andra 4 olika osv det vill säga $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$

5. Frågan skall förstås som hur många olika köer kan bildas av 4 ur en grupp av 6. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ möjliga köer.

6. a) $\binom{12}{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792$

b) Hur många olika hockeylag om 5 utspelare kan man forma om man har 12 spelare att välja från?

7. 5 kulor märkta 1 till 5.

a) $P_{\text{kula 1 först}} \cdot P_{\text{kula 2 sen}} \cdot P_{\text{kula 3 sist}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{60} \approx 1.7 \%$

b) Om ordningen är oviktig kan de tre kulorna komma i vilken ordning som helst dvs:

$$\frac{\text{antal gynnsamma fall}}{\text{totalt antal fall}} = \frac{3!}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{10} = 10 \%$$

8. $A = \{1,2,4,6,8,10\}$ och $B = \{2,3,4,5,6,7,12,14\}$

a) $A \cap B = [A \text{ snitt } B, \text{ dvs de element som finns i både } A \text{ och } B] = \{2,4,6\}$

b) $A \cup B = [A \text{ union } B, \text{ dvs de element som finns i } A \text{ eller i } B \text{ eller i båda}] = \{1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,14\}$

c) $|A \cup B| = [\text{Antalet element i } A \cup B] = 11$

9. Det totala utfallsrummet är:

0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1

Precis 2 klave finns i 3 av fallen dvs $P(2klave) = \frac{3}{8} = 0.375$, alternativ c) och d).

10. $(x^2 + 2x^3)^6 = \dots + \binom{6}{6-a} x^{2a} \cdot (2x^3)^{6-a} + \dots$ där $2a + 3(6 - a) = 14$ dvs $a = 4 \Rightarrow$

$$\binom{6}{2} x^8 \cdot (2x^3)^2 = 15 \cdot 4 = 60x^{14}$$

11. a) Båda graferna har 7 noder: SANN

b) 2 av noderna i båda graferna har graden 3 (kopplade till 3 kanter): SANN

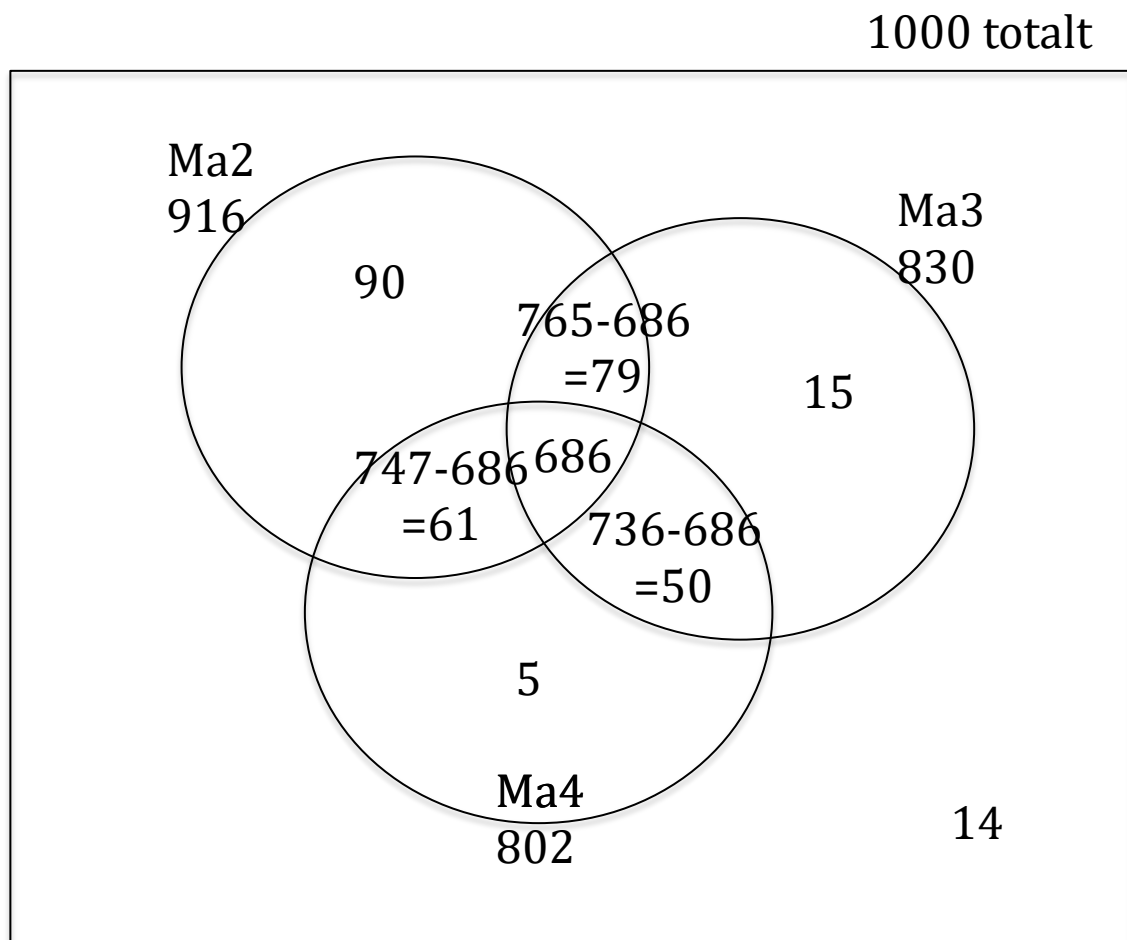
c) Inte i någon av graferna kan man passera alla kanter precis en gång: SANN

d) I den nedra grafen kan man passera alla noder precis en gång: FALSK

12. a) $16 = 2^4 = 4^2$ ingår i både A och B .

c) $4096 = 64^2 = 2^{12}$ ingår i både A och B .

13.



14. $23 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 999 = 12\,154\,833$ olika registreringsskyltar.

$$15. 28! \approx 3.05 \cdot 10^{29}$$

$$16. 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 = 11\,793\,600 \text{ olika sätt}$$

17. Att välja 7 utav 35 utan ordning blir:

$$\binom{35}{7} = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 17 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 31 \cdot 5 \cdot 29 = 6\,724\,520 \text{ möjliga rader}$$

$$\frac{1}{6\,724\,520} \approx 1.5 \cdot 10^{-7}$$

18.

$$\frac{\binom{4}{3} \binom{12}{2} \binom{4}{1}^2}{\binom{52}{5}} = \frac{\binom{4}{1} \binom{12}{2} \binom{4}{1}^2}{\binom{52}{5}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} \cdot 4^3}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{11 \cdot 8}{13 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 49} \approx 1.63 \cdot 10^{-3}$$

19.

$$\begin{aligned} (1 + x^2)^{25} &= \dots + \binom{25}{5} 1^{20} \cdot (x^2)^5 + \dots = \dots + \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} x^{10} + \dots = \\ &= \dots + 5 \cdot 6 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 7 \cdot x^{10} + \dots = \dots + 53130x^{10} + \dots \end{aligned}$$

20.

$$\binom{10}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5} \cdot \frac{4^7}{5^7} = 3 \cdot 8 \cdot \frac{1}{5 \cdot 5} \cdot \frac{4^7}{5^7} \approx 0.2$$

21. Man kan skapa en graf med 6 kanter, 6 grafer med 5 kanter, $\binom{6}{2}$ grafer med 4 kanter, $\binom{6}{3}$ grafer med 3 kanter, $\binom{6}{2}$ grafer med 2 kanter, 6 grafer med 1 kant och 1 graf med 0 kanter. Sammantaget blir det:

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$$

Blandade Uppgifter

1. a) {2,3,4,6}

b) {1,2,3}

c) {2}

d) {23, 29, 31, 37}

2. a) FALSK, 5 ingår inte i mängden {25}.

b) SANN, elementet 5 ingår i mängden.

c) FALSK, 14 är inte delbart med 3.

d) FALSK, den tomma mängden innehåller inte talet 0.

3. a) Totalt 16 kulor. 7/16

b) 9/16

5. Förstaplatsen har 4 möjligheter, andra 3 osv: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ olika sätt.

7. $9 + 24 = 33$ men det var bara 30 elever dvs 3 måste utöva båda sporterna.

8.

$$\binom{18}{2} \cdot \binom{12}{2} = \frac{18 \cdot 17}{2 \cdot 1} \cdot \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 9 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 11 = 10\,098 \text{ olika sätt}$$

9. Gör ett venndiagram med tre överlappande mängder där det finns 4 stolar i mitten. Räkna sedan ut att de tre mängderna tillsammans utgör 33 stolar dvs 7 saknar alla egenskaper.

10. Binomialteoremet ger:

$$\begin{aligned}(a + b)^{10} &= \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{10-i} a^{10-i} b^i = a^{10} + \binom{10}{9} a^9 b + \binom{10}{8} a^8 b^2 + \binom{10}{7} a^7 b^3 + \binom{10}{6} a^6 b^4 + \\ &+ \binom{10}{5} a^5 b^5 + \binom{10}{4} a^4 b^6 + \binom{10}{3} a^3 b^7 + \binom{10}{2} a^2 b^8 + \binom{10}{1} a b^9 + b^{10} = \\ &= a^{10} + 10a^9 b + 45a^8 b^2 + 120a^7 b^3 + 210a^6 b^4 + \\ &+ 252a^5 b^5 + 210a^4 b^6 + 120a^3 b^7 + 45a^2 b^8 + 10ab^9 + b^{10}\end{aligned}$$

11. Om bokstäverna måste vara olika blir det $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ kombinationer.

13. a) $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

b) $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ eller $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ eller $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

A	A	A	A	A	A	L	L	L	T	T	T
A	A	L	L	T	T	A	A	T	A	A	L
L	T	A	T	A	L	A	T	A	A	L	A
T	L	T	A	L	A	T	A	A	L	A	A

14. Dessa faktulteter innehåller både minst en tvåa och en femma.

15. En första person hälsar på 9 andra, nästa på 8, sedan 7 osv dvs

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \text{ handslag}$$

16. Det är 10 lag som alla skall spela 18 matcher. Skulle kunna tänka leda till 180 matcher, men kom ihåg att i varje match deltar 2 lag. 90 matcher räcker.

17. Faktorn 2 ingår i dem.

18. Alla noder behöver inte vara med i promenaden. Det blir 8 vägar, lite olika långa. Skall alla noder vara med precis en gång finns bara 2 promenader: norr ut eller söder ut från A, sen finns bara en möjlig väg.

20.

$$\begin{aligned} \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^9 &= \dots + \binom{9}{a} (x^2)^{9-a} \left(-\frac{1}{x}\right)^a + \dots = \{\text{där } 2(9-a) - a = 0 \Rightarrow a = 6\} = \\ &= \dots + \binom{9}{6} (x^2)^3 \left(-\frac{1}{x}\right)^6 + \dots = \dots + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \dots = \dots + 84 + \dots \end{aligned}$$

21. Alla födelsedagar anses lika sannolika och chansen för en viss födelsedag $\frac{1}{365}$.

Det blir möjligen tydligare att söka efter

$$\begin{aligned} 1 - P(\text{alla fyller år på olika dagar}) &= 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right) \left(1 - \frac{2}{365}\right) \dots \left(1 - \frac{29}{365}\right) = \\ &= 1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \dots \frac{336}{365} \approx 71 \% \end{aligned}$$

22.

$$\begin{aligned} \binom{16}{5} + \binom{16}{6} &= \frac{16!}{5!11!} + \frac{16!}{6!10!} = \frac{16!}{5!11 \cdot 10!} + \frac{16!}{6 \cdot 5!10!} = \\ &= \frac{6 \cdot 16!}{6 \cdot 5!11 \cdot 10!} + \frac{11 \cdot 16!}{6 \cdot 5!11 \cdot 10!} = \frac{(6+11) \cdot 16!}{6 \cdot 5!11 \cdot 10!} = \frac{17!}{6!11!} = \binom{17}{6} \end{aligned}$$

Generellt gäller:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \\ &= \frac{p(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-1-p)!(n-p)} = \frac{p(n-1)! + (n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!} = \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p} \end{aligned}$$

25. a) 10-1-1-1. Totalt antal händer med 13 kort är:

$$\begin{aligned} \binom{52}{13} &= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \\ &= 17 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 5 \cdot 43 \cdot 14 \cdot 41 \cdot 4 \end{aligned}$$

Antalet sätt 10 kort kan väljas ur en färg är: $\binom{13}{10} = \binom{13}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 2 \cdot 11$

Antalet sätt ett kort kan väljas ur en färg är 13, den färg som det skall finnas 10 av kan väljas på 4 olika sätt:

$$P(10-1-1-1) = \frac{13 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 4}{17 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 5 \cdot 43 \cdot 14 \cdot 41 \cdot 4} \approx 3.96 \cdot 10^{-6}$$

b) 5-5-3-0. Fem kort kan väljas ur en färg på $\binom{13}{5} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 11 \cdot 9 = 1287$ olika sätt.

Tre kort ur en färg kan väljas på $\binom{13}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 2 \cdot 11 = 286$ olika sätt.

Ordningen på 5-5-3-0 kan väljas på 12 olika sätt. Detta ger:

$$P(5-5-3-0) = \frac{1287 \cdot 1287 \cdot 286 \cdot 12}{17 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 5 \cdot 43 \cdot 14 \cdot 41 \cdot 4} \approx 8.95 \cdot 10^{-3}$$

Extramaterial

Om klockan är 17:00, vad är då klockan 2^{37} minuter senare?

Lösning: Då frågan handlar om vad klockan är efter 2^{37} minuter kan man använda att ett dygn är $60 \cdot 24 = 1440$ minuter och sedan till att börja med räkna (mod 1440) dvs

$$\frac{2^{37}}{1440} = \frac{2^{23}}{1440} \cdot 2^{14} \pmod{1440} \equiv \text{FRAC}(5825.4222) \cdot 2^{14} \pmod{1440} \equiv 992 \pmod{1440} \equiv$$

$$\equiv \{\text{nu är dygnen avklarade, minuter återstår}\} \equiv n \text{ dygn} + 992 \pmod{60} \equiv 16 \text{ h och } 32 \text{ minuter}$$

Då klockan från början är 17:00 blir klockan 2^{37} minuter senare 17:00+16 h+32 minuter dvs 9:32.