Ma2c - Prövning nr. 7 (av 9) för betyget E - Komplexa tal och Rotekvationer

$$Hjälpmedel: Papper, penna, sudd, formelblad\ och\ kalkylator$$

$$Obs!\ Minsta\ slarvfel\ kan\ ge\ underkänt.\ Nytt\ försök\ tidigast\ om\ en\ vecka.$$

z används för att beteckna komplexa tal enligt $z = x + iy$ där:

i är den imaginära enheten vilken definieras av $i^2 = -1$
x kallas realdelen av z och skrivs $Re\ z$ vilket ger $x = Re\ z$
y kallas imaginärdelen av z och skrivs $Im\ z$ vilket ger $y = Im\ z$.
Observera att x och y är reella variabler och att i inte ingår i $Im\ z$.

Observera att i är att betrakta som en konstant. z kan enligt ovan även skrivas som $z = Re\ z + i \cdot Im\ z$

Imaginära tal gör det möjligt att lösa även de andragradsekvationer som tidigare har sagts sakna lösning. De markeras i det komplexa talplanet med realdelen längs x-axeln och imaginärdelen längs y-axeln.

Som tidigare sagts kännetecknas en ekvation av att den innehåller minst en obekant, ett likhetstecken samt ett vänster- och ett högerled. I en rotekvation förekommer den obekanta under ett rottecken, till exempel:

$$1 + \sqrt{x - 1} = x$$

Genom att skriva om ekvationen så att roten blir ensam och sedan kvadrera båda sidor elimineras rottecknet. Observara att kvadreringen kan ge upphov till s.k. falska rötter — rötter som inte uppfyller den ursprungliga ekvationen. Därför måste rötterna kontrolleras!

Skriv av följande exempel och betänk hur ekvationerna och ekvationssystemen har lösts:

Ex.1 Sätt ut följande komplexa tal i det komplexa talplanet

a) $z_1 = i$

b) $z_2 = 1 + 4i$

c) $z_3 = 2 - 3i$

d) $z_4 = -3$

e) $z_5 = -1 - 4i$

Lösning:

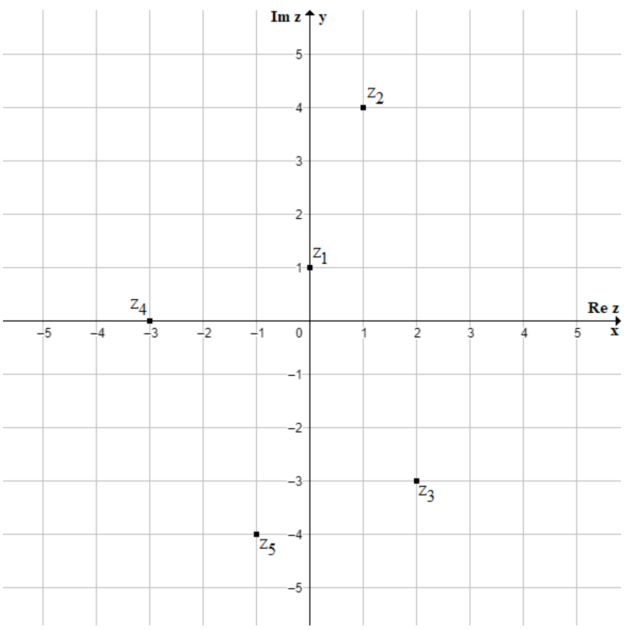
a) $z_1 = i \quad \Rightarrow \quad Re\ z_1 = 0, \quad Im\ z_1 = 1$

b) $z_2 = 1 + 4i \quad \Rightarrow \quad Re\ z_2 = 1, \quad Im\ z_2 = 4$

c) $z_3 = 2 - 3i \quad \Rightarrow \quad Re\ z_3 = 2, \quad Im\ z_3 = -3$

d) $z_4 = -3 \quad \Rightarrow \quad Re\ z_4 = -3, \quad Im\ z_4 = 0$

e) $z_5 = -1 - 4i \quad \Rightarrow \quad Re\ z_5 = -1, \quad Im\ z_5 = -4$



Ex.2 Skriv på komplex form och ange realdel och imaginärdel

a) $\sqrt{-16}$

b) $\sqrt{-17}$

c) $\sqrt{16}$

d) $\sqrt{17}$

e) $\sqrt{\dfrac{-25}{9}}$

f) $\sqrt{\dfrac{-26}{10}}$

Lösning:

a) $z = \sqrt{-16} = \sqrt{-1 \cdot 16} = \sqrt{i^2} \cdot \sqrt{16} = i \cdot 4 = 4i;\quad Re\ z = 0,\ Im\ z = 4$

b) $z = \sqrt{-17} = \sqrt{-1 \cdot 17} = \sqrt{i^2} \cdot \sqrt{17} = i \cdot \sqrt{17} = i\sqrt{17};\quad Re\ z = 0,\ Im\ z = \sqrt{17}$

c) $z = \sqrt{16} = 4;\quad Re\ z = 4,\ Im\ z = 0$

d) $z = \sqrt{17} = \sqrt{17};\quad Re\ z = \sqrt{17},\ Im\ z = 0$

e) $z = \sqrt{\dfrac{-25}{9}} = \dfrac{\sqrt{-1 \cdot 25}}{\sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{i^2} \cdot \sqrt{25}}{3} = \dfrac{i \cdot 5}{3} = \dfrac{5i}{3};\quad Re\ z = 0,\ Im\ z = \dfrac{5}{3}$

f) $z = \sqrt{\dfrac{-26}{10}} = \dfrac{\sqrt{-1 \cdot 26}}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{i^2} \cdot \sqrt{26}}{\sqrt{10}} = \dfrac{i\sqrt{26}}{\sqrt{10}};\quad Re\ z = 0,\ Im\ z = \dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{10}}$

Ex.3 Lös ekvationerna

a) $x^2 = -121$

b) $17 - 3x^2 = 44$

c) $x^2 + 2x + 4 = 0$

d) $3x^2 - 6x + 18 = 0$

Lösning:

a)
$$x^2 = -121$$
$$x = \pm\sqrt{-121} = \pm\sqrt{-1 \cdot 121} = \pm i\sqrt{121} = \pm 11i$$
$$x_1 = -11i \qquad x_2 = 11i$$

b)
$$17 - 3x^2 = 44$$
$$-3x^2 = 27$$
$$x^2 = -9$$
$$x = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{-1 \cdot 9} = \pm i\sqrt{9} = \pm 3i$$
$$x_1 = -3i \qquad x_2 = 3i$$

c)
$$x^2 + 2x + 4 = 0$$
$$x = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{(\frac{2}{2})^2 - 4}$$
$$x = -1 \pm \sqrt{\frac{4}{4} - 4}$$
$$x = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm \sqrt{-3} = -1 \pm i\sqrt{3}$$
$$x_1 = -1 - i\sqrt{3} \qquad x_2 = -1 + i\sqrt{3}$$

d)
$$3x^2 - 6x + 18 = 0$$
$$x^2 - 2x + 6 = 0$$
$$x = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{(\frac{-2}{2})^2 - 6}$$
$$x = -1 \pm \sqrt{\frac{4}{4} - 6}$$
$$x = -1 \pm \sqrt{1-6} = -1 \pm \sqrt{-5} = -1 \pm i\sqrt{5}$$
$$x_1 = -1 - i\sqrt{5} \qquad x_2 = -1 + i\sqrt{5}$$

Ex.4 Lös ekvationen $\sqrt{x+6} = x$

Lösning:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+6} &= x \\ x+6 &= x^2 \\ x^2 - x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{(\frac{-1}{2})^2 + 6}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+24}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2 \qquad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$$

Kontroll: $x = x_1 = -2 \quad \Rightarrow \quad VL = \sqrt{-2+6} = \sqrt{4} = 2 \quad HL = -2$ Falsk rot!

$$x = x_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad VL = \sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3 \qquad HL = 3 \text{ OK!}$$

Redovisa fullständiga, korrekta lösningar av följande uppgifter för betyget E:

1. Sätt ut följande komplexa tal i det komplexa talplanet

$z_1 = 3i$

$z_2 = 4 + i$

$z_3 = -3 + 2i$

$z_4 = -2$

$z_5 = -3 - 4i$

2. Skriv på komplex form och ange realdel och imaginärdel

a) $\sqrt{-36}$

b) $\sqrt{-37}$

c) $\sqrt{36}$

d) $\sqrt{37}$

e) $\sqrt{\dfrac{-36}{25}}$

f) $\sqrt{\dfrac{-37}{26}}$

3. Lös ekvationerna

a) $x^2 = -144$

b) $17 - 4x^2 = 81$

c) $x^2 + 4x + 8 = 0$

d) $5x^2 - 10x + 15 = 0$

4. Lös ekvationen $\sqrt{2x + 8} = x$