

Ma2c - Prövning nr. 8 (av 9) för betyget E - Exponential- ekvationer

Hjälpmedel : Papper, penna, sudd, formelsamling och kalkylator

Obs! Minsta slarvfel kan ge underkänt. Nytt försök tidigast om en vecka.

Låt C , C_1 och a vara konstanter. Då gäller att:

- en exponentialfunktion har formen $f(x) = Ca^x$, $a > 0$

- en exponentialekvation har formen $Ca^x = C_1$, $a > 0$

En ekvation kännetecknas som tidigare sagts av att den innehåller minst en obekant, ett likhetstecken samt ett vänster- och ett högerled. Lösningen består av värden på den obekanta.

Lösningsmetodik för ekvationer: Genom lämpliga omskrivningar av ekvationen skrivs den så att x står ensamt till vänster (eller höger) om likhetstecknet. Minns därvid att additioner (och subtraktioner) görs ledvis medan multiplikationer (divisioner), logaritmeringar och 'exponentialiseringar' må utföras på båda ledens alla termer för att likheten skall bibehållas (se de lösta uppgifterna).

Skriv av följande exempel och betänk hur ekvationerna och ekvations-systemen har lösts:

Ex.1 Beräkna $f(3)$ med fyra gällande siffror för följande funktioner

a) $f(x) = 1.7 \cdot x^{20}$

b) $f(x) = 20 \cdot 1.7^x$

Lösning

a) $f(3) = 1.7 \cdot 3^{20} = 5927533481.7 \approx 5.928 \cdot 10^9$

b) $f(3) = 20 \cdot 1.7^3 = 98.26$

Ex.2 Lös ekvationerna med fyra gällande siffror

a) $5^x = 19$

b) $3 \cdot 3^x = 21$

Lösning:

a)

$$\begin{aligned}5^x &= 19 \\ \lg 5^x &= \lg 19 \\ x \cdot \lg 5 &= \lg 19\end{aligned}$$

$$x = \frac{\lg 19}{\lg 5} \approx 1.829$$

b)

$$\begin{aligned}3 \cdot 3^x &= 21 \\ 3^x &= 7 \\ \lg 3^x &= \lg 7 \\ x \cdot \lg 3 &= \lg 7\end{aligned}$$

$$x = \frac{\lg 7}{\lg 3} \approx 1.771$$

Ex.3 En obebodd gård faller i värde med 9% per år. Ange en funktion som visar värdet v kr efter t år om det ursprungliga värdet är 5 850 000 kr.

Lösning:

En minskning med 9% per år innebär att förändringsfaktorn är $1.00 - 0.09 = 0.91$ vilket ger funktionen $v(t) = 5850000 \cdot 0.91^t$

Ex.4 När en viss frukt ruttnar uppgår mängden vitaminmolekyler i frukten till

$$v(t) = 12 \cdot 10^9 \cdot 0.871^t$$

där t är antalet dagar sedan förruttnelseprocessen började.

- Vad står $12 \cdot 10^9$ och 0.871 för i formeln?
- Vad blir $v(25)$ och hur tolkas det värdet?
- När har mängden vitaminer gått ned till 20% av det ursprungliga?

Lösning:

- $v(0) = 12 \cdot 10^9$ är ursprunglig mängd vitaminer och 0.871 förändringsfaktorn, dvs efter varje dag återstår $0.871 = 87.1\%$ av mängden vitaminer som fanns i frukten vid dagens början.
- $v(25) = 12 \cdot 10^9 \cdot 0.871^{25} \approx 0.380 \cdot 10^9$ är mängden vitaminer efter 25 dagar.
- Man söker t då $v(t) = 0.2 \cdot v(0)$.

$$\begin{aligned} 12 \cdot 10^9 \cdot 0.871^t &= 0.2 \cdot 12 \cdot 10^9 \\ 0.871^t &= 0.2 \\ \lg 0.871^t &= \lg 0.2 \\ t \cdot \lg 0.871 &= \lg 0.2 \\ t &= \frac{\lg 0.2}{\lg 0.871} \approx 11.65 \end{aligned}$$

Svar: Efter ca 12 dagar återstår 20%

Redovisa fullständiga, korrekta lösningar av följande uppgifter för betyget E:

1. Beräkna $f(2)$ med fyra gällande siffror för följande funktioner

a) $f(x) = 2.1 \cdot x^{10}$

b) $f(x) = 10 \cdot 2.1^x$

2. Lös ekvationerna med fyra gällande siffror

a) $7^x = 27$

b) $4 \cdot 4^x = 32$

3. En obebodd gård faller i värde med 8% per år. Ange en funktion som visar värdet v kr efter t år om det ursprungliga värdet är 6 350 000 kr.

4. När en viss frukt mognar under 4 månader uppgår mängden vitaminmolekyler i frukten till

$$v(t) = 37 \cdot 10^{10} \cdot 1.163^t$$

där t är antalet dagar sedan mogningsprocessen började.

a) Vad står $37 \cdot 10^{10}$ och 1.163 för i formeln?

b) Vad blir $v(62)$ och hur tolkas det värdet?

c) När har mängden vitaminer gått upp med 400% av det ursprungliga?