

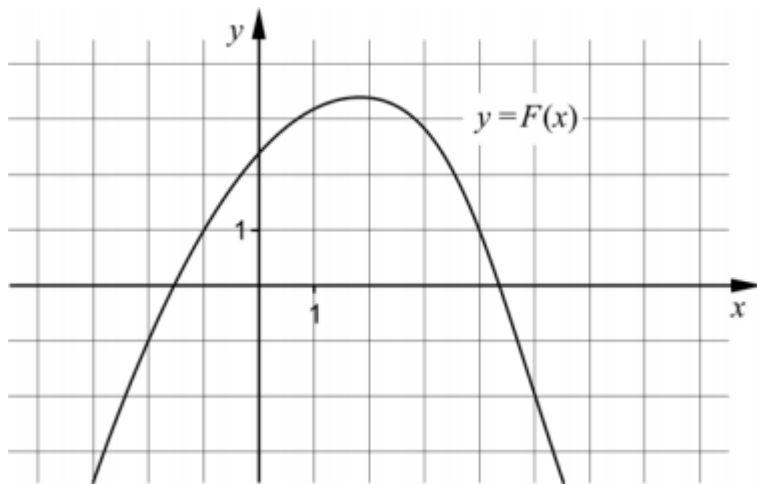
NAMN: _____

KLASS: _____

Del A: Digitala verktyg är tillåtna. Redovisa dina lösningar i svarsrutorna.

- 1) F är en primitiv funktion till funktionen f

I figuren visas grafen till funktionen F . Bestäm $\int_{-2}^5 f(x) \, dx$



0/0/1

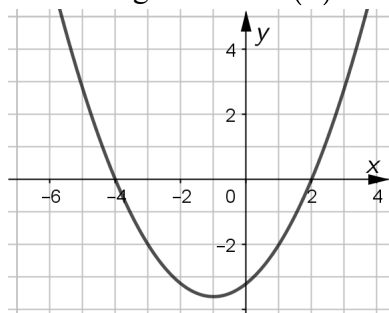
- 2) Om $x \geq 2$ och $y \geq -3$, vilket är då det minsta värde som uttrycket $2x + y^2$ kan ha?

0/0/1

- 3) Faktorisera följande uttryck $xy + y + xz + z$

0/0/1

- 4) Nedan är grafen till $F(x)$ ritad. $F(x)$ är den primitiva funktionen till $f(x)$.

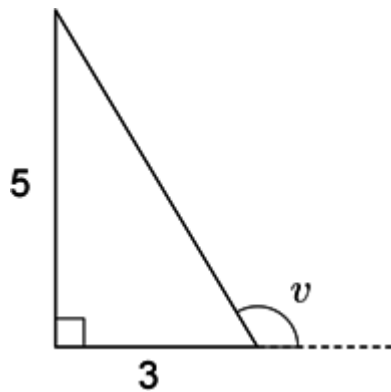


Bestäm $\int_{-3}^2 f(x) \, dx$.

0/0/1

5)

Vinkeln v är markerad i figuren nedan. Bestäm ett exakt värde för $\cos v$.



0/0/1

6) Lös ekvationerna

a) $(x + 5)(2x - 8) = 0$

b) $\frac{1}{(x - 2)^2} = 4$

2/1/1

7) En cirkel går genom punkterna $A = (-13, 0)$ och $B = (3, 0)$ i ett koordinatsystem. Sträckan AB är diameter i cirkeln.

a) Bestäm koordinater (x, y) för cirkelns medelpunkt.

Endast svar fordras.

b) Beräkna y -koordinaten för var och en av de punkter där cirkeln skär y -axeln.

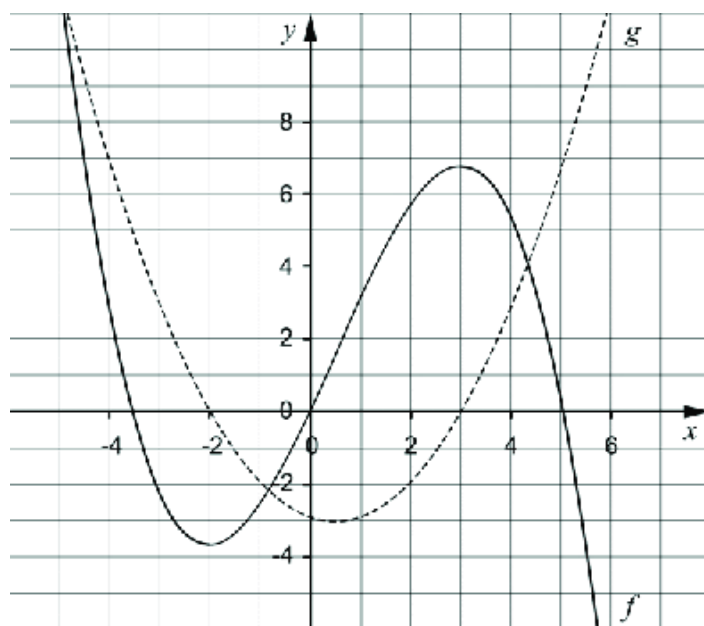
1/1/1

8) Vilket av de sex talen är minst? Motivera ditt svar.

$\ln(e) \quad \lg(e) \quad e \quad 1 \quad \ln(10) \quad \lg(10)$

1/1/1

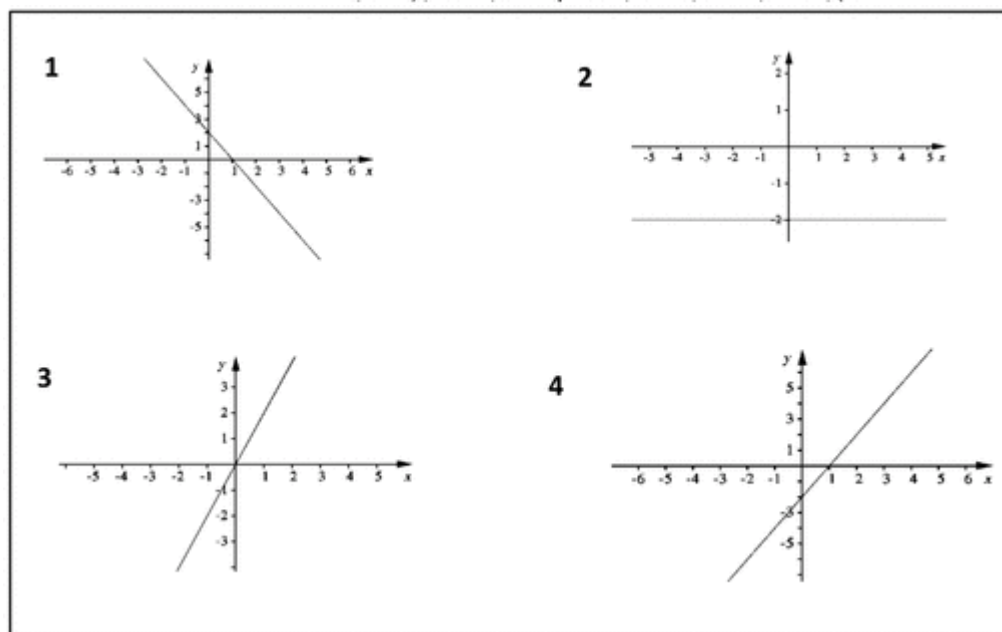
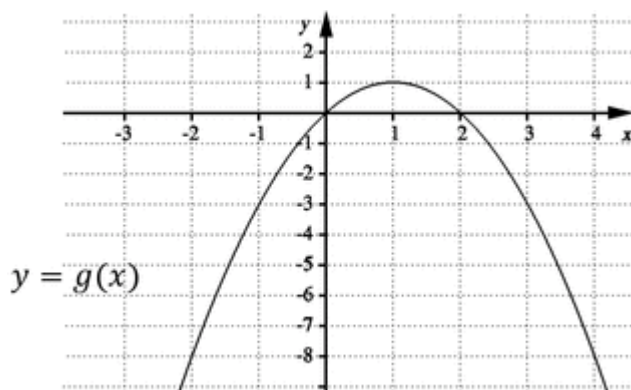
- 9) Figuren visar huvuddragen av graferna till två funktioner f och g .



Sven påstår att funktionen g är derivata till funktionen f . Undersök med hjälp av figuren om han har rätt. Funktionerna f och g behöver ej bestämmas.

0/1/1

- 10) Funktionen $y = g(x)$ har sin derivata $y = g'(x)$ uppritad i ett av alternativen 1-4 nedan. Välj det korrekta alternativet och motivera ditt svar. Endast svar ger 0 p.



0/1/1

- 11) Låt $f(x) = 2x$ och $g(x) = 3x + 6$ och lös följande ekvation

$$\frac{f(g(x))}{f(x)} = 3x$$

0/1/1

- 12) Stämmer det att om $a < 8$ så är $a^2 < 64$? Motivera.

0/1/1

13) Lös ekvationen

a) $4^3 \cdot 4^{2x} = 4^{17}$

b) $16^7 - 2^{24} = x \cdot 2^{24}$

0/1/1

14) En triangel har sidorna 3 cm, 5 cm och 6 cm.
Visa att triangeln är trubbvinklig.

0/1/1

15) Faktorisera uttrycket $p^4 - 1$ så långt som möjligt.

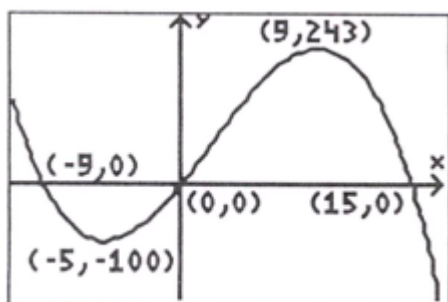
0/1/1

16) Beräkna värdet på a i ekvationen nedan:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{a} = \frac{8}{15}$$

0/1/1

17) Figuren visar kurvan $y = f(x)$, där $f(x) = kx(x - a)(x - b)$ samt koordinaterna för kurvans extrempunkter och skärningspunkter med x -axeln.



Beräkna värdet på konstanten k med exakt, algebraisk, metod.

0/1/1

18) Sant eller falskt?

Motivera varje påstående med ett exempel, en mening, och/eller ett generellt bevis.

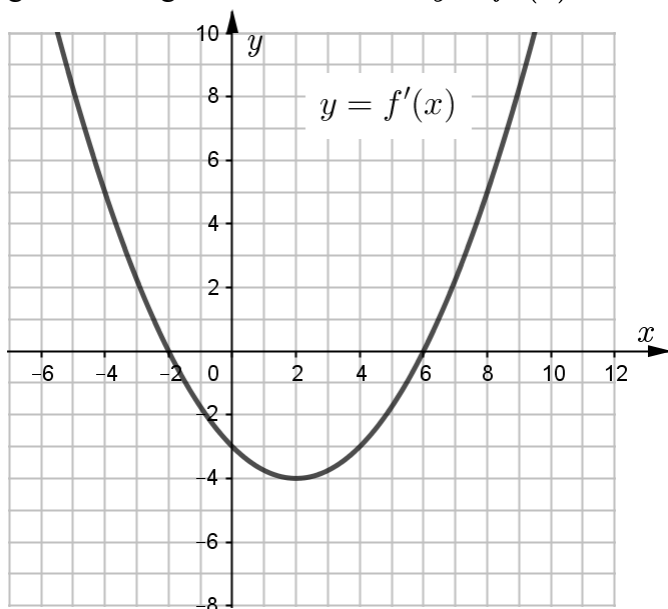
- a) Produkten av tre negativa tal är alltid mindre än produkten av tre positiva tal.
- b) Produkten av två negativa tal är alltid mindre än produkten av två positiva tal.
- c) Differensen av två negativa tal är alltid negativ.
- d) Summan av två negativa tal är alltid negativ.

2/2/1

19) Är följande påståenden korrekta? Motivera dina svar.

- a) $F(x) = 3e^{3x}$ är en primitiv funktion till $f(x) = e^{3x}$
- b) Grafen till $f(x) = x^3 + ax$ har tre olika nollställnen om konstanten $a \leq 0$

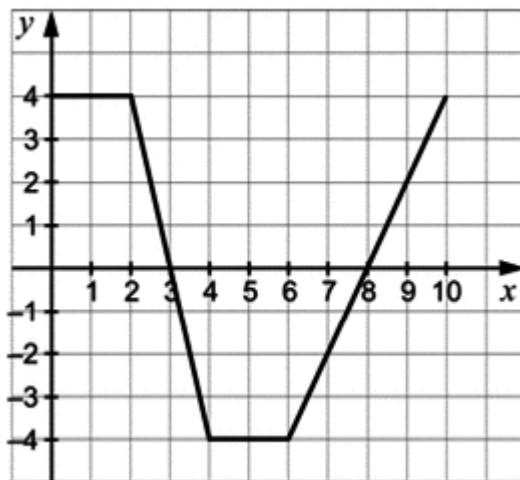
1/2/1

20) I figuren visas grafen till derivatan, $y = f'(x)$, för funktionen f .

- a) Bestäm $f'(4)$ med hjälp av grafen. *Endast svar fordras*
- b) För vilket värde på x har grafen till funktionen f en minimipunkt?
Förklara.

0/2/1

- 21) I figuren är grafen till funktionen $y = f(x)$, $0 < x \leq 10$ ritad. Man bildar en funktion g som definieras som $g(t) = \int_0^t f(x) \, dx$ för $0 \leq t \leq 10$



- a) Beräkna $g(3)$
 b) Bestäm t så att $g(t) = 0$

0/2/1

- 22) I vilka punkter skär linjen $y = 2x - 3$ cirkeln $9 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$?

0/2/1

- 23) I uttrycket $\frac{K}{Kx^n + x^{n+1}}$ är n ett heltal.
 Bestäm konstanten K så att uttrycket ej är definierat för $x = 3$

0/2/1

- 24) Finn alla lösningar till ekvationen $z^4 + 5z^2 - 36 = 0$

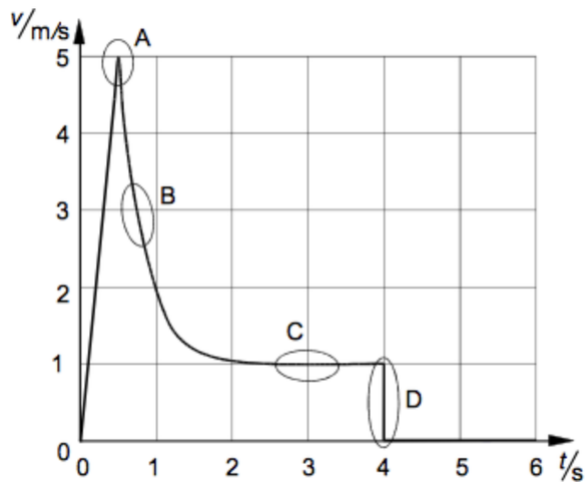
0/2/1

- 25) Faktorisera följande uttryck och förkorta där det går.

- a) $2x - 16x^2$
 b) $x^2 - 12x + 36$
 c) $\frac{2x + x^2}{2x}$
 d) $\frac{1}{16} - \frac{4x^2}{49}$

3/3/1

- 26) En stenkula släpps en bit ovanför en vattenyta. Grafen nedan visar hur stenens hastighet v m/s varierar med tiden t sekunder från det ögonblick då den släpps.



- Beskriv vad som händer med stenkulan i A, B, C och D.
- Hur högt ovanför vattenytan släpptes stenen?
- Stenkulans hastighet $v(t)$ m/s i vattnet kan beskrivas med funktionen $v(t) = 1 + 18e^{-3t}$. Bestäm vattendjupet där stenkulan släpps. Ge svaret i meter med två decimaler.

1/3/1

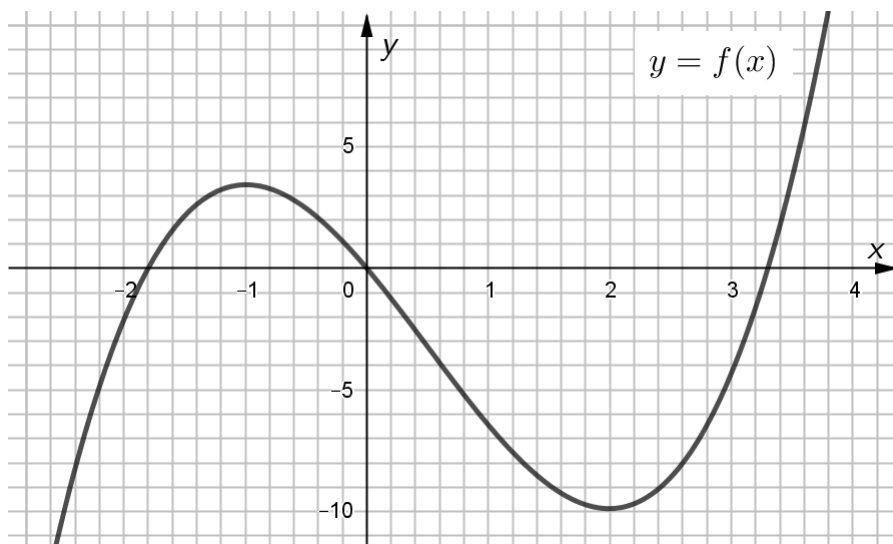
- 27) Lös ekvationen

- $2^{2x} = 2^{x/2} \cdot 2^{-1}$
- $(3^3)^x = 9^9$

0/4/1

28) I figuren visas grafen till tredjegradsfunktionen f . Använd grafen för att besvara följande frågor:

- Lös ekvationen $f(x) + 6,5 = 0$. Ange x med en decimal.
- För funktionen g gäller att $g(x) = f(x) + k$ där k är en positiv konstant. För vilka värden på k har ekvationen $g(x) = 0$ endast en reell lösning?



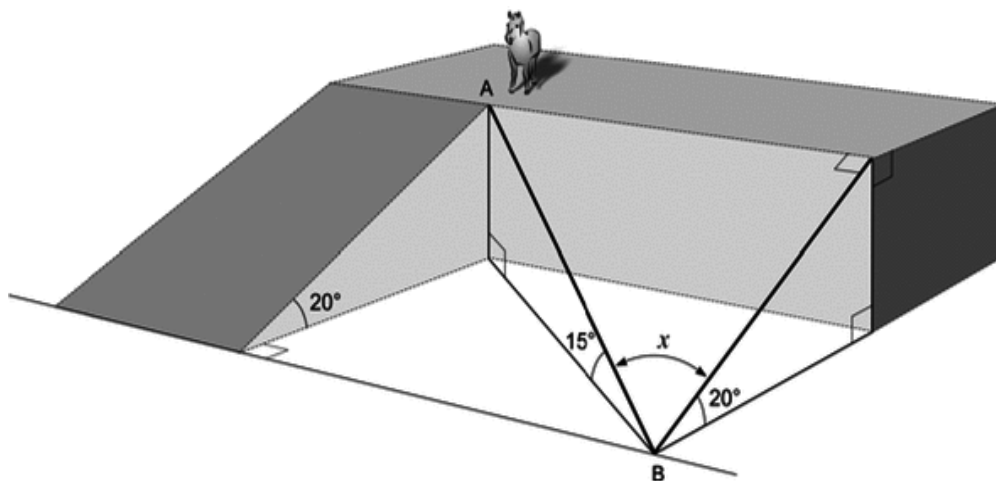
0/0/2

29) Bestäm värdet av $A^2 - B^2$ om $A = 2012^x + 2012^{-x}$ och $B = 2012^x - 2012^{-x}$

0/0/2

30) På en bergssida som lutar 20° mot horisontalplanet vill man anlägga en ridväg. För att minska vägens lutning och underlätta för hästar att gå uppför sluttningen lägger man ridvägen snett uppåt.

Beräkna vinkeln x så att lutningen på ridvägen AB blir 15° . Se figur.



0/0/2

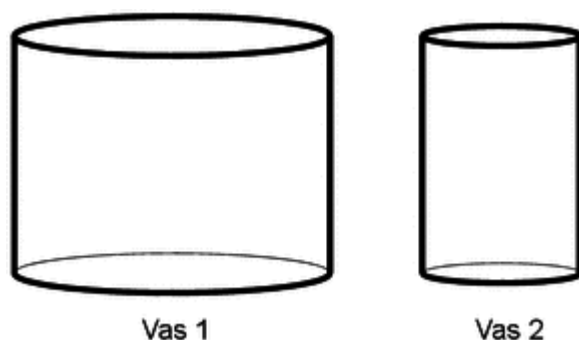
31) Förenkla $f(a) - f(a - 1)$, om $f(x) = x(x + 1)(x + 2)$

0/0/2

32) Förenkla $f(a) - f(a - 1)$, om $f(x) = x(x + 1)(x + 2)$

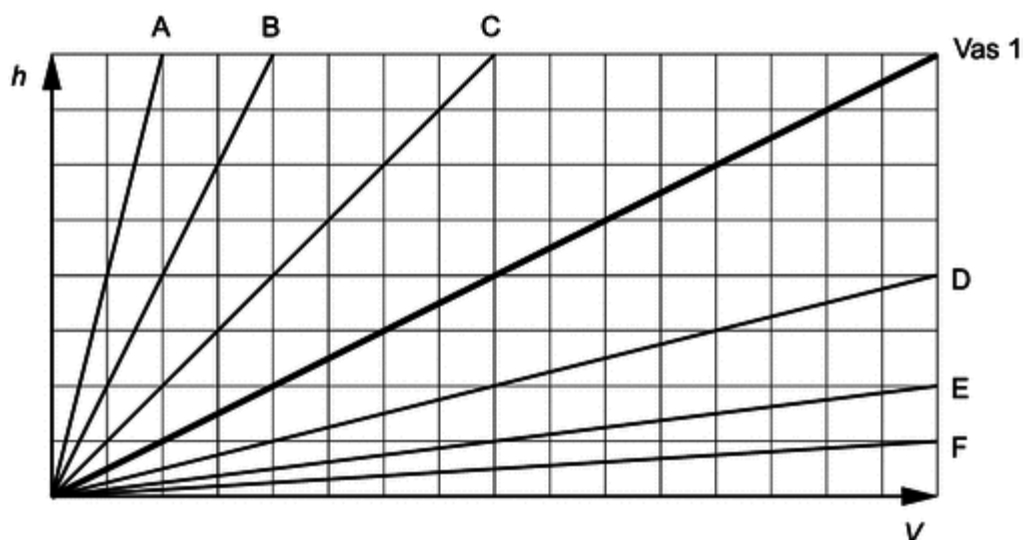
0/0/2

33)



Två cylinderformade vaser, vas 1 och vas 2, fylls med vatten. Vas 1 har dubbelt så stor radie som vas 2. I diagrammet nedan visar den bredare linjen hur vattenhöjden h beror av vattenvolymen V i vas 1.

Utred vilken av de övriga linjerna A - F som visar hur vattenhöjden h beror av vattenvolymen V i vas 2.



0/1/2

34) Två tangenter till $y = 3x^2 - 2x + 3$ skär varandra i en punkt. Beräkna punktens koordinater om tangenterna tangerar kurvan i $x = -1$ och $x = 2$.

0/1/2

- 35) För funktionen f gäller att $f(x) = \frac{x^2}{A}$ där A är en konstant ($A \neq 0$). Bestäm $f'(x)$ med hjälp av derivatans definition.

0/1/2

- 36) För en kurva $y = f(x)$ gäller att tangentens riktningskoefficient i varje punkt är proportionell mot x -värdet i kvadrat. Bestäm $f(x)$ om kurvan går genom punkten $(1, -1)$ och i denna punkt har en tangent med lutningen 3.

0/1/2

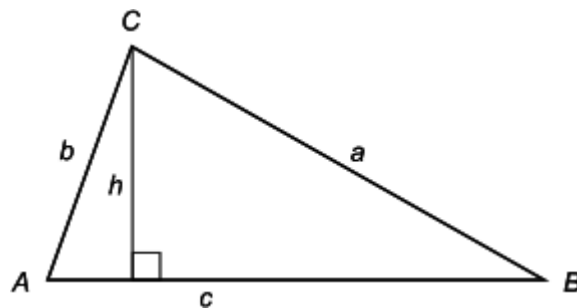
- 37) För $f(x) = e^{2x}$ gäller att $f(1, 1) \approx 9$
Använd att $f(1, 1) \approx 9$ och bestäm ett närmevärde till

a) $f'(1, 1)$

b) $f'(3, 3)$

1/2/2

- 38) I triangeln ABC med sidorna a , b och c är vinklarna A och B spetsiga.



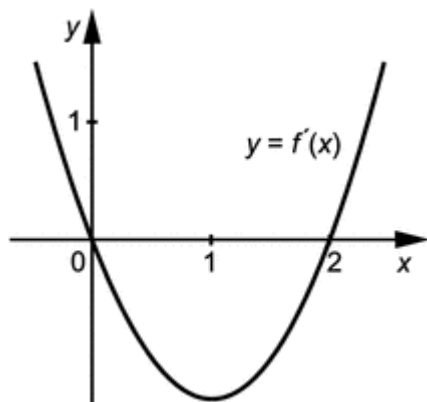
Visa, utan att använda sinussatsen, att $b \sin A = a \sin B$

0/2/2

- 39) Vi drar en tangent till kurvan $y = kx^2$ och en annan tangent till kurvan $y = k(x - 2)^2$ och båda tangenterna dras genom kurvornas skärningspunkt. För vilka värden på parametern k är tangenterna vinkelräta mot varandra?

0/2/2

- 40) I bilden visas grafen till derivatan $y = f'(x)$. Derivatan är en andragradsfunktion.



Det finns flera funktioner som har en derivata vars graf ser ut som den på bilden.

Skissa graferna till några av dessa funktioner i ett och samma koordinatsystem.

Motivera varför dina grafer har detta utseende.

0/2/2

- 41) Fredrik och Gustav deltar i samma cykellopp. Loppet är 90 km långt. Fredrik håller jämn fart hela loppet medan Gustavs fart varierar. Man kan förenklat beskriva den sträcka (i km) de har cyklat med funktionerna:

$$f(t) = 30t \text{ och } g(t) = t^3 - 6t^2 + 37,8t \text{ där } t \text{ är tiden i timmar efter start.}$$

Fredrik och Gustav startar samtidigt. Fredrik går i mål först. Han passerar mållinjen precis 3 timmar efter start.

Hur lång tid efter start är avståndet mellan Fredrik och Gustav störst och hur långt är avståndet mellan dem då?

0/2/2

- 42) Visa med hjälp av derivatans definition vad derivatan till $f(x) = \frac{1}{x}$ blir.

0/0/3

Bedömningsanvisningar

1) -1

Godtagbar lösning, där insikt visas om att problemet löses genom direkt avläsning i graf, med korrekt svar.

+ A_{PL}

2) 4

Korrekt svar.

+ A_B

3) $(x + 1)(y + z)$

Korrekt svar.

+ A_P

4) Integralens värde är 2.

Korrekt svar.

+ A_{PL}

5) $\cos v = \frac{-3}{\sqrt{34}}$

Korrekt svar.

+ A_P

6) a) $x_1 = -5$ $x_2 = 4$

En lösning korrekt angiven

+ E_B

Båda lösningarna korrekt angivna

+ E_P

b) $x_1 = 1,5$ $x_2 = 2,5$

En lösning korrekt angiven

+ C_P

Två lösningar korrekt angivna

+ A_P

7) a) $(-5, 0)$

Korrekt svar.

+ E_P

b) $y = \pm\sqrt{39}$ eller t ex $y \approx 6,2$; $y \approx -6,2$

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer cirkelns ekvation
 $((x + 5)^2 + y^2 = 64)$

+ C_P

med korrekt svar.

+ A_P

8) $\lg(e)$

Redovisad godtagbar ansats till lösning, t.ex. motiverar att
 $\ln(e) = 1$ och $\lg(10) = 1$

+ E_P

med korrekt svar och godtagbara förklaringar men som saknar någon
 motivering.

+ C_P

Lösningen presenteras på A-nivå.

+ A_K

9) **Nej, Sven har fel**

Godtagbar ansats, t ex påpekar att x -koordinaterna för derivatans
 nollställen stämmer överens med extrempunkternas x -koordinater.

+ C_B

Korrekt svar med godtagbar motivering som t ex "Kring en maximipunkt
 ska derivatans teckenväxling vara $+0-$, här är det tvärtom".

+ A_B

10) **Alternativ 1 är rätt. Funktionen har lutning noll när $x = 1$.
 Derivatans teckenväxling $+$ till $-$ när $x = 1$.**

Valt rätt alternativ och ger någon typ av förklaring.

+ C_R

Ger en tydlig förklaring med ett resonemang som motsvarar kraven på
 A-nivå.

+ A_R

11) $x_1 = 2$
 $x_2 = -1$

God ansats, exempelvis skriver ekvationen utan funktionssymboler.

+ C_P

Korrekt lösning.

+ A_P

12) **Nej, bara om $-8 < a < 8$ så gäller påståendet**

Eleven visar att påståendet är falskt med ett eller flera exempel.

+ C_R

Eleven använder matematiska symboler för att kortfattat förklara sin
 slutsats.

Exempelvis:

"Påståendet är falskt för $a \leq -8$ "

"Påståendet är endast sant för $-8 < a < 8$ "

+ A_K

13) a) $x = 7$

Korrekt svar + C_P

b) $x = 15$

Korrekt svar + A_P

14) Godtagbar ansats, t ex tecknat cosinussatsen för att beräkna den största vinkeln. + C_R

Eleven genomför beviset på ett godtagbart sätt. + A_R

15) **Korrekt svar** $(p^2 + 1)(p - 1)(p + 1)$.

Alternativt $(p + i)(p - i)(p + 1)(p - 1)$

Eleven faktorerar uttrycket till $(p^2 - 1)(p^2 + 1)$ + C_P

Korrekt svar + A_P

16) $a = 5$

Korrekt svar, t ex genom att ha prövat sig fram lösningen + C_{PL}

Redovisad och effektiv lösningsmetod med korrekt svar + A_P

17) $k = -0,25$

Godtagbar ansats, t ex bestämmer a och b + C_B

med i övrigt korrekt lösning och svar. + A_{PL}

18) a) Sant
b) Falskt
c) Falskt
d) Sant

Aspekter	E	C	A
Begrepp	Två korrekta svar	Tre korrekta svar	Fyra korrekta svar med godtagbara motiveringar.
Resonemang	Godtagbar motivering på en eller två av påståenderna (även när slutsatsen är felaktig)	Godtagbara motiveringar på större delen av påståendena,	

19) a) T ex "Nej, för om man deriverar F får man inte f "

Godtagbart svar som visar insikt om att villkoret $F'(x) = f(x)$ inte är uppfyllt . + E_R

b) Troliggör att påståendet stämmer om $a < 0$ *eller* visar att påståendet inte stämmer om $a = 0$. + C_R

Troliggör för mer än två specialfall att påståendet stämmer om $a < 0$ *och* visar att påståendet inte stämmer om $a = 0$. + C_R

Visar att påståendet stämmer för *alla* $a < 0$ *och* visar att påståendet inte stämmer om $a = 0$. + A_R

20) a) -3

Korrekt svar. + C_B

b) **T ex "derivatans teckenväxling är minus noll plus då $x = 6$, då är det en minimipunkt"**

Redovisad godtagbar ansats, t ex påstår att derivatans nollställen är $x_1 = 6$ och $x_2 = -2$. + C_B

Godtagbar förklaring. + A_B

21) a) 10

Korrekt svar med godtagbar beräkning. + C_{PL}

b) $t_1 = 6$ och $t_2 = 10$

Ett korrekt angivet nollställe ($t = 6$ eller $t = 10$) med godtagbar motivering. + C_R

Drar slutsatsen att det finns två nollställen till funktionen g ($t = 6$, $t = 10$) + A_R

22) Korrekt svar är: Punkterna (0, 52; -1, 96) och (3, 08; 3, 16)

Godtagbar ansats, till exempel ersätter y i cirkelns ekvation med $2x - 3$ och bestämmer x-koordinaterna för skärningspunkterna korrekt + C_B

Godtagbar fortsättning, till exempel korrekt bestämning av cirkelns y-koordinater vid de beräknade x-koordinaterna. + C_P

Korrekt bestämt båda skärningspunkterna + A_P

23) $K = -3$

Godtagbar ansats till lösning, t.ex. beskriver att uttrycket inte är + C_B

definierat när nämnaren är 0

Bestämmer K genom ett specialfall eller påbörjar en generell metod
(ställer upp ekvationen $K \cdot 3^n + 3^{n+1} = 0$)

+ C_{PL}

korrekt svar med hjälp av en generell metod.

+ A_{PL}

24) $z_{1,2} = \pm 2 \quad z_{3,4} = \pm 3i$

Godtagbar ansats, t.ex. genomför variabelbytet $t = z^2$ och erhåller
ekvationen $t^2 + 5t - 36 = 0$

+ C_P

Löser ekvationen för t . ($t_1 = 4$ och $t_2 = -9$)

+ C_P

Löser ursprunglig ekvation genom att utnyttja variabelbytet igen och
bestämmer ekvationens samtliga fyra rötter. Även de imaginära.

+ A_P

25) a) $2x(1 - 8x)$

Brutit ut antingen 2 eller x .

+ E_P

Korrekt svar.

+ E_P

b) $(x - 6)^2$

Korrekt svar

+ E_P

c) $\frac{(2+x)}{2} = 1 + \frac{x}{2} = 1 + 0,5x$

Faktoriserat täljaren till $x(2+x)$

+ C_P

Korrekt förkortat och svar.

+ C_P

d) $\left(\frac{1}{4} + \frac{2x}{7}\right) \left(\frac{1}{4} - \frac{2x}{7}\right)$

Påbörjad lösning med förståelse för att konjugatregeln ska användas.

+ C_P

Korrekt svar.

+ A_P

26) a) **A: Stenen träffar vattenytan**

B: Stenen bromsas upp genom vattnet

C: Stenen sjunker genom vattnet med konstant hastighet

D: Stenen träffar botten

Godtagbar redovisning av händelseförloppet med minst tre av fyra
händelser korrekt angivna.

+ E_R

Fullständigt korrekt och tydlig beskrivning av händelseförloppet

+ C_R

b) **1,25 m**

Godtagbar ansats med godtagbart svar.

+ C_{PL}

c) **4,84 m**

Godtagbar ansats (t ex angett integralen $\int_{0,5}^4 v(t) dt$

+ C_R

med godtagbar beräkning av vattendjupet.

+ A_{PL}27) a) $x = -2/3$

Påbörjad lösning, sätter exponenterna lika med varandra
med korrekt lösning.

+ C_B+ C_Pb) $x = 6$

Påbörjad lösning, använder potenslagarna
och sätter exponenterna lika med varandra
med korrekt lösning.

+ C_B+ C_{PL}+ A_P28) a) $x_1 \approx -2,3$, $x_2 \approx 1$ och $x_3 \approx 2,8$

Godtagbart svar.

+ A_{PL}b) $k > 10$

Godtagbart svar.

+ A_B29) **4**

Korrekt svar.

+ A_{PL}+ A_P30) $x = 41^\circ$

Godtagbar ansats, t ex eleven tecknar uttryck för $\sin 15^\circ$ och $\sin 20^\circ$
med i övrigt godtagbar lösning.

+ A_{PL}+ A_{PL}31) $3a^2 + 3a$

Godtagbar ansats, t ex sätter in a och $a - 1$ korrekt i uttrycket
Korrekt svar.

+ A_B+ A_P32) $3a^2 + 3a$

Godtagbar ansats, t ex sätter in a och $a + 1$ korrekt i uttrycket + A_B

Korrekt svar. + A_P

33) Alternativ B

Redovisad godtagbar ansats + C_{PL}

med i övrigt redovisad godtagbar lösning. + A_{PL}

Eleven ger en klar och tydlig generell motivering till varför linje B representerar $v = 2$. + A_K

34) (0, 5; - 4)

Bestämmer lutningen på båda tangenterna eller bestämmer en av ekvationerna korrekt. + C_{PL}

Bestämmer båda tangenternas ekvationer korrekt. + A_M

Fullständig lösning med korrekt svar. + A_K

35) $\frac{2x}{A}$

Godtagbar ansats, t.ex. ställer upp kvoten $\frac{(x+h)^2}{A} - \frac{x^2}{A}$ + C_B

med korrekt bevis och korrekt svar + A_P

lösningen presenteras på A-nivå. + A_K

36) $f(x) = x^3 - 2$

Godtagbar ansats, t ex ställer upp $f'(x) = 3x^2$ eller konstaterar att $f(1) = -1$ och $f'(1) = 3$ + C_B

med godtagbar fortsättning, bestämmer $f'(x) = 3x^2$ + A_B

Korrekt svar och godtagbar lösning. + A_{PL}

37) a) $f'(1, 1) \approx 18$

Korrekt derivering, $f'(x) = 2e^{2x}$ + E_P

med korrekt svar. + C_{PL}

b) Redovisad godtagbar ansats, t ex använder $f'(3, 3) = f'(3 \cdot 1, 1)$ + C_{PL}

Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang genom att utnyttja att $f(1, 1) \approx 9$ och visa att $f'(3, 3) \approx 2 \cdot 9^3$

+ A_R

Redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

+ A_K

- 38) En godtagbar ansats t ex uttrycker h på två olika sätt med godtagbart slutfört bevis.
Eleven genomför beviset korrekt och använder ett korrekt och lämpligt matematiskt språk.

+ C_{PL}+ C_R+ A_R+ A_K

39) $k = \pm \frac{1}{2}$

Godtagbar ansats tex identifierar att kurvorna alltid skär varandra i $x = 1$ med godtagbar fortsättning tex beräknar derivatorna och visar insikt att produkten av derivatornas värde ska vara -1 för att tangenterna ska vara vinkelräta.

+ C_{PL}+ C_{PL}

med minst ett korrekt svar.

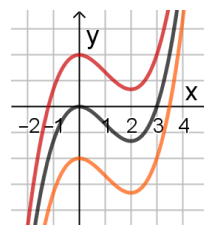
+ A_{PL}

helt korrekt med en tydlig redovisning av samtliga delar med ett korrekt matematiskt språk.

+ A_K

- 40) En godtagbar beskrivning innehåller:

- en godtagbar redogörelse för varför grafen till funktionen f har en maximipunkt där $x = 0$ och en minimipunkt där $x = 2$
- en godtagbar skiss av minst en möjlig kurva
- en godtagbar redogörelse för varför de tänkbara graferna ser likadana ut men är förskjutna i y -led



Beskrivningen innehåller en av ovanstående punkter.

+ C_R

Beskrivningen innehåller ytterligare en av ovanstående punkter.

+ C_R

Ger en redogörelse som innehåller all den information som beskrivs i de tre ovanstående punkterna.

+ A_R

Redovisar välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsakligt korrekt matematiskt språk.

+ A_K

- 41) 3,6 km, när Fredrik går i mål efter 3 timmar.

Redovisad godtagbar ansats, t.ex. bildar funktionen

+ C_M

$$f(t) = 0,3 \cdot t^2 + 7,2 \cdot t$$

$$n(t) = t^2 - 0.8t + 1,8t$$

med korrekt bestämning av funktionsvärdet vid någon av extrempunkterna eller vid ändpunkten.

+ C_P

Analyserar problemet och visar att det största avståndet är 3,6 km och att det inträffar just då Fredrik går i mål.

+ A_{PL}

Redovisar välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

+ A_K

42)
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Härledning av derivatan till $f(x) = \frac{1}{x}$ med definitionsformeln.

+ A_B

Säkerhet i procedurerna med korrekt svar.

+ A_P

Uppgiften kommuniceras korrekt (till exempel limesbegreppet).

+ A_K