

Ma2c - Prövning nr. 5 (av 9) för betyget E - Andragradsfunktioner

Hjälpmedel : Papper, penna, sudd, formelblad och kalkylator

Obs! Minsta slarvfel kan ge underkänt. Nytt försök tidigast om en vecka.

En funktion är en regel, tex. ett matematiskt uttryck som när man sätter in x-värden ger y-värden. Tillåtna x-värden är funktionens definitionsmängd och beräknade y-värden dess värdemängd. Varje x-värde får bara ge ett y-värde. Däremot kan olika x-värden ge samma y-värde.

Andragradsfunktioner har följande allmänna form:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Eftersom koefficienterna (a , b och c) är tre till antalet behövs i det allmänna fallet tre kombinationer av x- och y- värden, tre punkter, för att bestämma en viss funktion.

Vidare gäller att tecknet på a avgör om kurvan har en dal eller en topp (positivitet a ger dal) och att den skär y-axeln i $(0, c)$. x -koordinaten för vertex (maxi- eller minipunkten) ges av $-\frac{b}{2a}$ i pq-formeln. Om kurvan skär x-axeln ligger dess vertex mitt emellan dess nollställen. En andragradsfunktionens symmetrilinje delar grafen till funktionen i två spegelvända kongruenta delar. Den är lodrät och går genom vertex. För illustrationer av ovanstående, se de lösta exemplen.

För att hitta eventuella skärningar med x-axeln (nollställen) löser man ekvationen:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Den allmänna formen kan skrivas om som:

$$f(x) = a(x^2 + b/a \cdot x + c/a)$$

I specialfallet att funktionens nollställen x_1 och x_2 är kända kan parantesen $(x^2 + b/a \cdot x + c/a)$ skrivas som

$$(x - x_1)(x - x_2)$$

Utgår man sedan från ytterligare en punkt, (x_p, y_p) , på kurvan kan a beräknas ur:

$$y_p = f(x_p) = a(x_p - x_1)(x_p - x_2)$$

Skriv av följande tre exempel och betänk hur andrags-funktionsteorin har använts:

Ex.1 Undersök andragsfunktionen $f(x) = 3x^2 - 9x + 6$ med avseende på:

- Skärningspunkt med y-axeln.
- Eventuella nollställen.
- Vertex, maximi- eller minimipunkt samt dess funktionsvärde.
- Grafisk representation.

Lösning:

- Funktionen skär y-axeln när $x = 0$ vilket ger $f(0) = 6$, punkten är $(0, 6)$.
- För att lösa $3x^2 - 9x + 6 = 0$ börjar man med att dividera med 3:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Denna ekvation löses med pq-formeln (eller faktorisering):

$$x = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}}$$

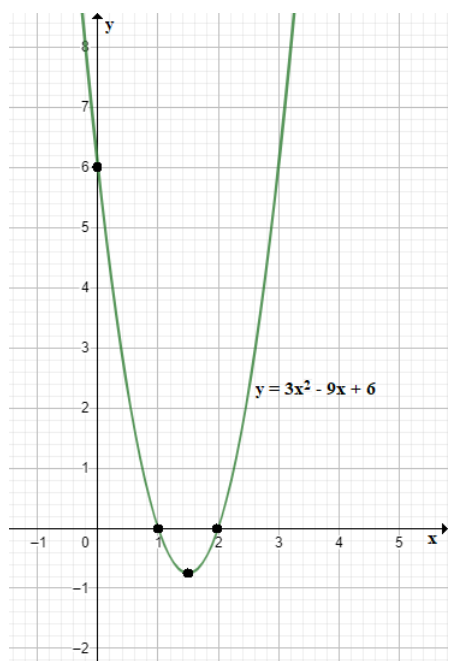
$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

- Vertex är en minimipunkt eftersom koefficienten framför x^2 är positiv. Funktionsvärdet ges av $f(3/2)$ eftersom vertex ligger mitt emellan nollställena:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 9 \cdot \frac{3}{2} + 6 = 3 \cdot \frac{9}{4} - \frac{27}{2} + 6 = \frac{27}{4} - \frac{54}{4} + \frac{24}{4} = -\frac{3}{4}$$

- För figur v.g.v.



Ex.2 Bestäm för $f(x) = x^2 + 4x$

- symmetrilinje.
- koordinaterna för vertex.
- största alternativt värde.

Lösning:

- a) Symmetrilinjen finns mitt emellan nollställena, vilka ges av:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x + 4) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -4$$

Symmetrilinjen är $x = -2$

- b) $x = -2$ ger $f(x) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) = -4$ dvs vertex ligger i $(-2, -4)$.

- c) Koefficienten framför x^2 -termen är positiv, alltså minimivärde -4 .

Ex.3 Bestäm för $f(x) = -4x^2 - 8x - 8$

- symmetrilinje.
- koordinaterna för vertex.
- största alternativt minsta värde.
- grafisk representation.

Lösning:

- a) Symmetrilinjen finns mitt emellan nollställena, vilka ges av $f(x) = 0$:

$$-4x^2 - 8x - 8 = 0$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 2}$$

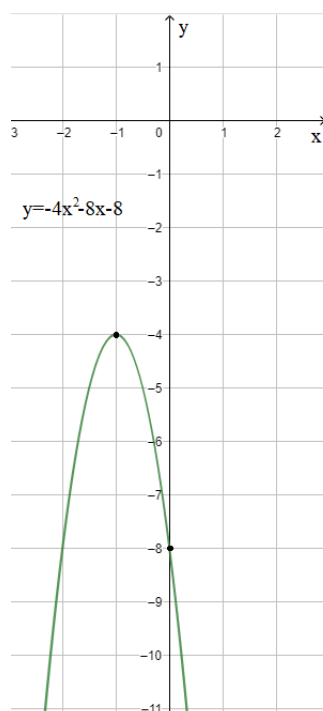
$$x = -1 \pm \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{8}{4}}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{\frac{-4}{4}} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Nollställen saknas.

Symmetrilinjen ges av $x = -1$.

- $x = -1$ ger $f(x) = -4(-1)^2 - 8 \cdot (-1) - 8 = -4$ dvs vertex ligger i $(-1, -4)$.
- Koefficienten framför x^2 - termen är negativ, alltså maximivärde -4 .
- För figur v.g.v.



Redovisa fullständiga, korrekta lösningar av följande uppgifter för betyget E:

1. Studera funktionen $f(x) = x^2 + 3x - 4$ och bestäm
 - a) nollställen
 - b) symmetrilinje
 - c) typ av vertex
 - d) vertex koordinater
 - e) rita $y = f(x)$.

2. Studera funktionen $f(x) = -x^2 + 3x - 4$ och bestäm
 - a) nollställen
 - b) symmetrilinje
 - c) typ av vertex
 - d) vertex koordinater
 - e) rita $y = f(x)$.

3. En andragsgradsfunktion har nollställen i $x = 0$ och $x = 4$ och går igenom punkten $(x_p, y_p) = (1, 3)$. Beräkna k genom att sätta in nollställen och punkten i formeln $y_p = f(x_p) = k(x_p - x_1)(x_p - x_2)$. Bestäm sedan funktionens ekvation genom att förenkla $f(x) = k(x - x_1)(x - x_2)$.