Övningshäfte Algebra och funktioner

Fråga 1: $f(x) = 3x^2 - 7 - 2x$ är ett polynom. Beräkna värdet av f(0), f(2) och f(π)

____

Fråga 2: Ingångslönen på företaget Börjes Gurkinläggning och IT-konsult AB beskrivas med funktionen $L(p) = 17500 + 15p$ där p är antalet universitetspoäng den anställde har tagit.
Bängt har aldrig läst på högskola. Vad får Bängt för ingångslön?_______________
Sivan har läst 4 år på universitet och har tagit 160 poäng. Sivans ingångslön blir ___________
Beräkna $L(160) - L(0)$ och förklara med ord vad det betyder!____________________________

____

Fråga 3: Förenkla följande uttryck/polynom så långt som möjligt

$3(x^2 - 2x)(2x - 3) - (-6x + 4)(3x - x^2)$ ________________________

$2x^3 + 3x^2 - 99x = 2x(x^2 - 1.5x)$ _________________________

$(x + 3)(x - 3) - (3 + x)(3 - x)$ ________________________

$(x^2 + 3x - 4)(-2x^2 + 2x + 1)$ ______________________

$(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ ____________________

Fråga 4: Bryt ut så mycket som möjligt ur följande uttryck

$2xy^2 + 4xy - 8x$ ___________________

$27xy^3 - 33x^2y^2 + 12x^3y^3$ _____________________________

$7a^1b^3 - 70a^3b^5 + 28ab^2 - 17ab$ ___________________________

Fråga 5: Lös följande ekvationer

$9s - 4 = 3$ ____________________

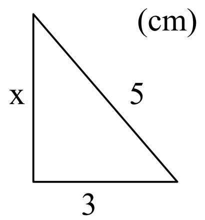
$3x + 19 = 4x - 2$ ___________________

$3x + 19 < 4x - 2$ ___________________

$3x + 19 \geq 4x - 2$ ___________________

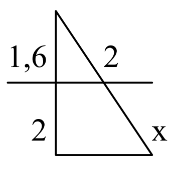
$4(x - 2)(x - 4) + 6x = 4x^2$ ____________________

Fråga 6: Bestäm arean av följande triangel

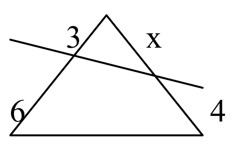


Fråga 7: Beräkna längden av sträckan x (i cm).

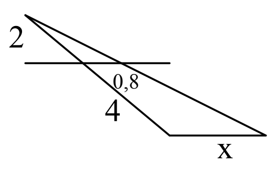
a)



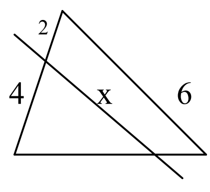
b)



c)

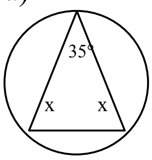


d)

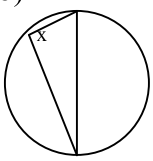


Fråga 8: Bestäm vinkeln x och (i sista uppgiften) vinkeln y

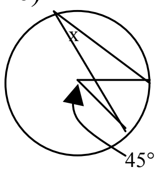
a)



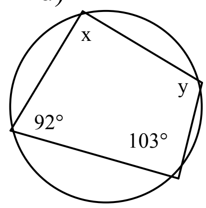
b)



c)



d)



Fråga 9: Bestäm avståndet mellan punkterna P_1 och P_2
$P_1=(3, 8)$ och $P_2=(5, 9)$
$P_1=(4, 6)$ och $P_2=(-1, -2)$

Fråga 10: Bestäm mittpunkten på den räta linjen som går mellan punkterna P_1 och P_2
$P_1=(3, 8)$ och $P_2=(5, 9)$
$P_1=(4, 6)$ och $P_2=(-1, -2)$

Fråga 11: Bestäm k-värdet på den räta linjen som går mellan punkterna P_1 och P_2
$P_1=(3, 8)$ och $P_2=(5, 9)$
$P_1=(4, 6)$ och $P_2=(-1, -2)$

Fråga 12: Bestäm ekvationen för den räta linjen som går mellan punkterna P_1 och P_2
$P_1=(3, 8)$ och $P_2=(5, 9)$
$P_1=(4, 6)$ och $P_2=(-1, -2)$

Fråga 13: Funktionen $y = 3x - 4$ är en rät linje.
Hitta en linje parallell med denna som går genom punkten (0,1).
Hitta en linje vinkelrät med denna som går genom punkten (0,1).

Fråga 14: Funktionen $y = -3x + 4$ är en rät linje.
Hitta en linje parallell med denna som går genom punkten (0,1).
Hitta en linje vinkelrät med denna som går genom punkten (0,1).

Fråga 15: Lös följande ekvationer
$x - 2 < 3x + 4$
$2x - 3 \geq 6x - 4$
$-3x < -12$

Fråga 16: Lös följande linjära ekvationssystem

$$\begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 67 \\ x + y = 19 \end{cases}$$

Fråga 17: Lös följande andragradsekvationer

$x^2 + 6x = 0$
$x^2 - 4x - 5 = 0$
$x^2 + 10x + 9 = 0$
$3x^2 + 12x - 13 = 2$

Fråga 18: Följande problem saknar alla lösning. Motivera för var och en vad som inte stämmer/är tillåtet.

$x^2 + x + 13 = 1$ ____

$\begin{cases} -a + b = 6 \\ 2a - 2b = 2 \end{cases}$ ____

Beräkna $f(3)$ då $f(x) = \dfrac{4 + x^3}{3(-x + 3)}$ ______________________________

Beräkna $f(3)$ då $f(x) = \sqrt{4(1 - x)}$ ______________________________

Facit till uppgifterna

Fråga 1:

$f(0) = 3 \times 0^2 - 7 - 2 \times 0 = 0 - 7 - 0 = -7$

$f(2) = 3 \times 2^2 - 7 - 2 \times 2 = 3 \times 4 - 7 - 4 = 12 - 7 - 4 = 1$

$f(\pi) = 3 \times \pi^2 - 7 - 2 \times \pi = 3\pi^2 - 2\pi - 7$ Vi kommer inte längre än så. Om vi skulle vilja fortsätta måste vi räkna med ett närmevärde på π, t.ex. $\pi \approx 3.14$.

Fråga 2:

Bängts ingångslön $L(0) = 17500 + 15 \times 0 = 17500$ Svar 17500 SEK/mån

Sivans ingångslön $L(160) = 17500 + 15 \times 160 = 19900$ Svar 19900 SEK/mån

$L(160) - L(0) = 19900 - 17500 = 2400$ om man har klarat av 4 år på högskola får man 2400 SEK/mån mer i lön än om man inte har några högskolepoäng alls.

Fråga 3: Förenkla följande uttryck/polynom så långt som möjligt

$3(x^2 - 2x)(2x - 3) - (-6x + 4)(3x - x^2) =$

$3(2x^3 - 3x^2 - 4x^2 + 6x) - (-18x^2 + 6x^3 + 12x - 4x^2) =$

$= 6x^3 - 9x^2 - 12x^2 + 18x + 18x^2 - 6x^3 - 12x + 4x^2 = 6x^3 - 6x^3 - 21x^2 + 22x^2 + 18x - 12x =$

$= x^2 + 6x$

$2x^3 + 3x^2 - 99x = 2x(x^2 - 1.5x)$

$2x^3 + 3x^2 - 99x = 2x^3 - 3x^2$

$2x^3 - 2x^3 + 3x^2 + 3x^2 - 99x = 2x^3 - 2x^3 - 3x^2 + 3x^2$

$6x^2 - 99x = 0$

$6x(x - \frac{99}{6}) = 0$

$x - \frac{99}{6} = 0$ eller $6x = 0$

$x = \frac{99}{6}$ eller $x = 0$

$(x+3)(x-3) - (3+x)(3-x) = x^2 - 3^2 - (3^2 - x^2) = x^2 - 3^2 - 3^2 + x^2 = 2x^2 - 2 \times 9 =$

$2x^2 - 18$

$(x^2 + 3x - 4)(-2x^2 + 2x + 1) = -2x^4 + 2x^3 + x^2 - 6x^3 + 6x^2 + 3x + 8x^2 - 8x - 4 =$

$= -2x^4 - 4x^3 + 15x^2 - 5x - 4$

$(x-2)(x-3)(x-4) = (x^2 - 3x - 2x + 6)(x - 4) = (x^2 - 5x + 6)(x - 4) =$

$x^3 - 4x^2 - 5x^2 + 20x + 6x - 24 = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$

Fråga 4:

$2xy^2 + 4xy - 8x = 2x \times y^2 + 2x \times 2y - 2x \times 4 = 2x(y^2 + 2y - 4)$

$27xy^3 - 33x^2y^2 + 12x^3y^3 = 3xy^2 \times 9y - 3xy^2 \times 11x + 3xy^2 \times 4x^2y = 3xy^2(9y - 11x + 4x^2y)$

$$7a^1b^3 - 70a^3b^5 + 28ab^2 - 17ab = ab \times 7b^2 - ab \times 70a^2b^4 + ab \times 28b - ab \times 17 =$$
$$ab(7b^2 - 70a^2b^4 + 28b - 17)$$

Fråga 5:

$9s - 4 = 3$
$9s - 4 + 4 = 3 + 4$
$9s = 7$
$\frac{9s}{9} = \frac{7}{9}$
$s = \frac{7}{9}$

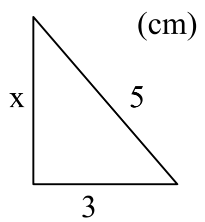
$3x + 19 = 4x - 2$
$3x - 3x + 19 + 2 = 4x - 3x - 2 + 2$
$19 + 2 = 4x - 3x$
$x = 21$

$3x + 19 < 4x - 2$
$3x - 3x + 19 + 2 < 4x - 3x - 2 + 2$
$19 + 2 < 4x - 3x$
$21 < x$
$x > 21$

$3x + 19 \geq 4x - 2$
$3x - 3x + 19 + 2 \geq 4x - 3x - 2 + 2$
$19 + 2 \geq 4x - 3x$
$21 \geq x$
$x \leq 21$

$4(x - 2)(x - 4) + 6x = 4x^2$
$4(x^2 - 4x - 2x + 8) + 6x = 4x^2$
$4(x^2 - 6x + 8) + 6x = 4x^2$
$4x^2 - 24x + 32 + 6x = 4x^2$
$4x^2 - 4x^2 - 18x + 32 = 4x^2 - 4x^2$
$-18x + 32 = 0$
$32 = 18x$
$\frac{32}{18} = \frac{18x}{18}$
$2 = x$

Fråga 6:



Pythagoras sats ger

$x^2 + 3^2 = 5^2$

$x^2 + 3^2 - 3^2 = 5^2 - 3^2$

$x^2 + 3^2 - 3^2 = 5^2 - 3^2$

$x^2 = 25 - 9$

$x^2 = 16$

$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

Men svaret $x = -4$ har ingen relevans så den stryker vi.

$x = 4$

Arean av en triangel är

$A = \dfrac{b \times h}{2}$

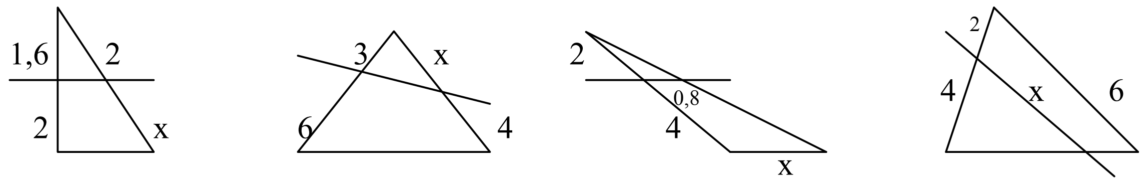
$b = 3, h = x = 4$ ger

$A = \dfrac{3 \times 4}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

Svar: Arean=6cm^2

Fråga 7:

a) b) c) d)



a) Två lösningar finns

Topptriangelsatsen ger

$\dfrac{1.6}{2 + 1.6} = \dfrac{2}{2 + x}$

$\dfrac{1.6}{(2 + 1.6)}(2 + x)(2 + 1.6) = \dfrac{2}{(2 + x)}(2 + x)(2 + 1.6)$

$1.6(2 + x) = 2(2 + 1.6)$

$3.2 + 1.6x = 4 + 3.2$

$3.2 - 3.2 + 1.6x = 4 + 3.2 - 3.2$

$1.6x = 4$

$\dfrac{1.6x}{1.6} = \dfrac{4}{1.6}$

$x = 2.5\,\text{cm}$

Parallelltransversalsatsen ger

$\dfrac{1.6}{2} = \dfrac{2}{x}$

$\dfrac{1.6}{2}2x = \dfrac{2}{x}2x$

$1.6x = 2 \times 2$

$$\frac{1.6x}{1.6} = \frac{4}{1.6}$$
$$x = 2.5\,\text{cm}$$

b) Det finns inte tillräckligt med information för att lösa uppgiften.

c) Topptriangelsatsen ger

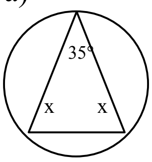
$$\frac{2}{2+4} = \frac{0.8}{x}$$
$$\frac{2}{6}6x = \frac{0.8}{x}6x$$
$$2x = 0.8 \times 6$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{4.8}{2}$$
$$x = 2.4\,\text{cm}$$

d)

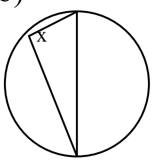
$$\frac{4}{4+2} = \frac{x}{6}$$
$$\frac{4}{6}6 = \frac{x}{6}6$$
$$4 = x$$
$$x = 4\,\text{cm}$$

Fråga 8: Bestäm vinkeln x och (i sista uppgiften) vinkeln y

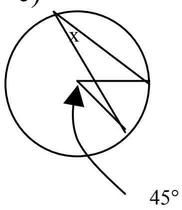
a)



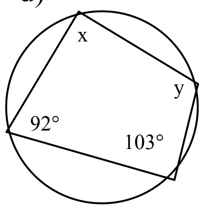
b)



c)



d)



a)
Vinkelsumman I en triangel är 180°.

$$35 + x + x = 180$$
$$35 - 35 + 2x = 180 - 35$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{145}{2}$$
$$x = 75.5$$

b) x kan betraktas som en randvinkel. Då får vi en medelpunktsvinkel som är 180°.
Randvinkelsatsen säger att
2 × Randvinkeln = medelpunktsvinkeln

$$2x = 180$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{180}{2}$$
$$x = 90$$

c) x kan betraktas som en randvinkel. Motsvarande medelpunktsvinkel är då 45°.

Randvinkelsatsen säger att
2 × Randvinkeln = medelpunktsvinkeln
$2x = 45$
$\frac{2x}{2} = \frac{45}{2}$
$x = 22.5$

d) För en fyrhörning inskriven i en cirkel gäller att om a och b är två motstående vinklar i fyrhörningen så är $a + b = 180$
$x + 103 = 180$
$x + 103 - 103 = 180 - 103$
$x = 77$
$y + 92 = 180$
$y + 92 - 92 = 180 - 92$
$y = 88$

Fråga 9:
P_1=(3, 8) och P_2=(5, 9)
$A_{1-2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
$A_{1-2} = \sqrt{(5-3)^2 + (9-8)^2}$
$A_{1-2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

P_1=(4, 6) och P_2=(-1, -2)
$A_{1-2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
$A_{1-2} = \sqrt{(-1-4)^2 + (-2-6)^2}$
$A_{1-2} = \sqrt{(-5)^2 + (-8)^2} = \sqrt{25+64} = \sqrt{89}$

Fråga 10:
P_1=(3, 8) och P_2=(5, 9)
$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$
$x_m = \frac{3+5}{2}, y_m = \frac{8+9}{2}$
$x_m = \frac{8}{2}, y_m = \frac{17}{2}$
$(x_m, y_m) = (4,8.5)$

P_1=(4, 6) och P_2=(-1, -2)
$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$
$x_m = \frac{4+(-1)}{2}, y_m = \frac{6+(-2)}{2}$

$x_m = \frac{3}{2}, y_m = \frac{4}{2}$

$(x_m, y_m) = (1.5,2)$

Fråga 11:

P_1=(3, 8) och P_2=(5, 9)

$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$k = \frac{9-8}{5-3} = \frac{1}{2}$

P_1=(4, 6) och P_2=(-1, -2)

$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$k = \frac{-2-6}{-1-4} = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5} = 1.6$

Fråga 12:
P_1=(3, 8) och P_2=(5, 9)
$y = kx + m$ k-värdet har vi redan räknat ut i föregående fråga. k=0.5
Sätt in en av de två punkterna i ekvationen, t.ex. P_1.
$8 = 0.5 \times 3 + m$
$8 = 1.5 + m$
$8 - 1.5 = 1.5 - 1.5 + m$
$6.5 = m$

$y = 0.5x + 6.5$

P_1=(4, 6) och P_2=(-1, -2)
$y = kx + m$ k-värdet har vi redan räknat ut i föregående fråga. k=1.6
Sätt in en av de två punkterna i ekvationen, t.ex. P_2.
$-2 = 1.6 \times (-1) + m$
$-2 = -1.6 + m$
$-2 + 1.6 = -1.6 + 1.6 + m$
$-0.4 = m$

$y = 1.6x - 0.4$

Fråga 13: Funktionen $y = 3x - 4$ är en rät linje.
Hitta en linje parallell med denna som går genom punkten (0,1).

Funktionen vi söker har formen $y = kx + m$
En parallell linje till $y = 3x - 4$ har samma k-värde som denna, dvs. k=3.
$y = 3x + m$
Punkten (0,1) skall ligga på linjen. Sätt in denna:
$1 = 3 \times 0 + m$

$1 = m$
$y = 3x + 1$

Hitta en linje vinkelrät med denna som går genom punkten (0,1).
Funktionen vi söker har formen $y = kx + m$
En linje vinkelrät mot $y = 3x - 4$ har ett k-värde sådant att
$k \times 3 = -1$.
$$\frac{3k}{3} = \frac{-1}{3}$$
$$k = -\frac{1}{3}$$
$$y = -\frac{1}{3}x + m$$
Punkten (0,1) skall ligga på linjen. Sätt in denna:
$$1 = -\frac{1}{3} \times 0 + m$$
$1 = m$
$$y = -\frac{1}{3}x + 1$$

Fråga 14: Funktionen $y = -3x + 4$ är en rät linje.
Funktionen vi söker har formen $y = kx + m$
En parallell linje till $y = -3x + 4$ har samma k-värde som denna, dvs. k=-3.
$y = -3x + m$
Punkten (0,1) skall ligga på linjen. Sätt in denna:
$1 = -3 \times 0 + m$
$1 = m$
$y = -3x + 1$

Hitta en linje vinkelrät med denna som går genom punkten (0,1).
Funktionen vi söker har formen $y = kx + m$
En linje vinkelrät mot $y = -3x + 4$ har ett k-värde sådant att
$k \times (-3) = -1$.
$$\frac{-3k}{-3} = \frac{-1}{-3}$$
$$k = \frac{1}{3}$$
$$y = \frac{1}{3}x + m$$
Punkten (0,1) skall ligga på linjen. Sätt in denna:
$$1 = \frac{1}{3} \times 0 + m$$
$1 = m$
$$y = \frac{1}{3}x + 1$$

Fråga 15: Lös följande ekvationer

$x-2<3x+4$

$x-3x-2+2<3x-3x+4+2$

$-2x<6$

$\frac{-2x}{-2}>\frac{6}{-2}$

$x>-3$

$2x-3\geq 6x-4$

$2x-2x-3+4\geq 6x-2x-4+4$

$1\geq 4x$

$\frac{1}{4}\geq\frac{4x}{4}$

$\frac{1}{4}\geq x$

$x\leq\frac{1}{4}$

$-3x<-12$

$\frac{-3x}{-3}>\frac{-12}{-3}$

$x>4$

Fråga 16: Lös följande linjära ekvationssystem

$\begin{cases}2x-2y=4\\ x+y=1\end{cases}$ Tag undre raden gånger 2 och addera till den övre raden

$\begin{cases}2x+2x-2y+2y=4+2\\ x+y=1\end{cases}$

$\begin{cases}4x=6\\ x+y=1\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{4x}{4}=\frac{6}{4}\\ x+y=1\end{cases}$

$\begin{cases}x=\frac{6}{4}\\ \frac{6}{4}+y=1\end{cases}$

$\begin{cases}x=\frac{6}{4}\\ \frac{6}{4}-\frac{6}{4}+y=1-\frac{6}{4}\end{cases}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{6}{4} \\ y = -\dfrac{2}{4} = -0.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1.5 \\ y = -0.5 \end{cases}$$

$\begin{cases} 3x + 2y = 67 \\ x + y = 19 \end{cases}$ Tag undre raden gånger -2 och addera till den övre raden

$$\begin{cases} 3x + (-2x) + 2y + (-2y) = 67 + (-38) \\ x + y = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 29 \\ 29 + y = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 29 \\ 29 - 29 + y = 19 - 29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 29 \\ y = -10 \end{cases}$$

Fråga 17:

$x^2 + 6x = 0$
$x(x+6) = 0$
$x = 0$ eller $(x+6) = 0$
$x = 0$ eller $x + 6 - 6 = 0 - 6$
$x = 0$ eller $x = -6$

$x^2 - 4x - 5 = 0$ pq-formeln ger

$$x = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + 5} = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm \sqrt{9} = 2 \pm 3$$

$x_1 = 5, x_2 = -1$

$x^2 + 10x + 9 = 0$ pq-formeln ger

$$x = -\frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 9} = -5 \pm \sqrt{25-9} = -5 \pm \sqrt{16} = -5 \pm 4$$

$x_1 = -1, x_2 = -9$

$3x^2 + 12x - 13 = 2$
$3x^2 + 12x - 13 - 2 = 2 - 2$
$3x^2 + 12x - 15 = 0$

$$\frac{3x^2}{3} + \frac{12x}{3} - \frac{15}{3} = \frac{0}{3}$$

$x^2 + 4x - 5 = 0$ pq-formeln ger

$$x = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + 5} = -2 \pm \sqrt{4+5} = -2 \pm \sqrt{9} = -2 \pm 3$$
$x_1 = 1, x_2 = -5$

Fråga 18:

$x^2 + x + 13 = 1$
$x^2 + x + 13 - 1 = 1 - 1$
$x^2 + x + 12 = 0$
$x^2 + 1 \times x + 12 = 0$ pq-formeln ger

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12} = -0.5 \pm \sqrt{0.5^2 - 12} = -0.5 \pm \sqrt{-11.75}$$

Denna saknar lösning eftersom vi får ett negativt tal under roten och detta är inte tillåtet.

$\begin{cases} -a + b = 6 \\ 2a - 2b = 2 \end{cases}$ Multiplicera första raden med 2 och addera den till andra raden

$$\begin{cases} -a + b = 6 \\ 2a + (-2a) - 2b + 2b = 2 + 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a + b = 6 \\ 0 = 14 \end{cases}$$

$0 = 14$ är orimligt och därför saknar ekvationssystemet lösning.

$$f(x) = \frac{4 + x^3}{3(-x + 3)}$$

$$f(3) = \frac{4 + 3^3}{3(-3 + 3)} = \frac{4 + 27}{3 \times 0} = \frac{31}{0}$$

Division med noll är inte tillåtet. Därför är funktionen inte tillåten för x=3.

$f(x) = \sqrt{4(1 - x)}$
$f(3) = \sqrt{4(1 - 3)} = \sqrt{4(-2)} = \sqrt{-8}$

Vi får ett negativt tal under roten och detta är inte tillåtet. Därför är funktionen inte tillåten för x=3.