

Kapitel 5

Några uppgifter från kapitel 5, Sannolikhet och statistik.

5114. a) $\frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4} = 0.25$

b) $\frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{8} = 0.125$

c) $\frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{12} \approx 8.3 \%$

5115. a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

b) $\frac{360^\circ - 30^\circ}{360^\circ} = \frac{330^\circ}{360^\circ} = \frac{11}{12} \approx 92 \%$

c) $\frac{360^\circ - 45^\circ - 30^\circ}{360^\circ} = \frac{285^\circ}{360^\circ} = \frac{19}{24} \approx 79 \%$

5208. a) 32 olika utfall, 4 lika på båda hjulen. $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

Utfallsrum:

4				*					
3			*						
2		*							
1	*								
	1	2	3	4	5	6	7	8	

b) 8 udda produkter av 32 möjliga. $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

4	j	j	j	j	j	j	j	j
3	u	j	u	j	u	j	u	j
2	j	j	j	j	j	j	j	j
1	u	j	u	j	u	j	u	j
	1	2	3	4	5	6	7	8

5209. a) Högst 3 prickar ger $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	9	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

b) Per vinner 11 gånger av 12 och tjänar sålunda på spelet.

5210. Sannolikheten att tärningarna visar samma tal är $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

Då alla triss räknas finns 6 olika dvs $P(\text{triss}) = \frac{1}{36}$

5307. a) Utfallsrum av två mynt:

0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Alla ettor: $\frac{1}{16}$

b) $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

c) $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

5308. Använd samma utfallsrum som i uppgift 5307, låt 1 betyda flicka och 0 pojke.

a) $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

b) $\frac{5}{16}$

5309. Ljusen lyser antingen rött eller grönt dvs $P(G) + P(R) = 1$

$$(P(G))^3 \approx 0.5 \Rightarrow P(G) = \sqrt[3]{0.5} \text{ men } P(R) = 1 - P(G) = 1 - \sqrt[3]{0.5}$$

Alla ljus röda fås som $P(R)^3 = (1 - \sqrt[3]{0.5})^3 \approx 0.9\%$

5321. Lösning 1: Utfallsrummet ser ut som:

5	−	−	+	+	+	*
4	−	−	+	+	*	+
2	−	−	+	*	+	+
1	−	−	*	+	+	+
−2	+	*	−	−	−	−
−3	*	+	−	−	−	−
−3	−2	1	2	4	5	

Totalt 30 utfall, av dessa är 14 positiva och 16 negativa.

a) $\frac{14}{30} = \frac{7}{15}$

b) $\frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

Lösning 2: Sannolikheten att första lappen är $P(\text{positiv}) = \frac{4}{6}$, Andra lappen $P(\text{positiv}) = \frac{3}{5}$
dvs positiv produkt $P_1(+) = \frac{12}{30}$

Sannolikheten att första lappen är $P(\text{negativ}) = \frac{2}{6}$, Andra lappen $P(\text{negativ}) = \frac{1}{5}$ dvs positiv
produkt $P_2(+) = \frac{2}{30}$. Summan av dessa är $P_1(+) + P_2(+) = \frac{2}{30} + \frac{12}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$

$$P(-) = 1 - P(+) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

$$5322. \text{ a) } P(\text{flicka vinner}) = \frac{54\,259}{54\,259 + 57\,821} \approx 48.4 \%$$

$$\text{b) } 3 \cdot P(\text{flicka vinner})^2 P(\text{pojke vinner}) \approx 36.3 \%$$

$$5323. \text{ a) } \left(\frac{1}{3}\right)^{13} \approx 6.3 \cdot 10^{-7}$$

$$\text{b) } \left(\frac{2}{3}\right)^{13} \approx 0.5 \%$$

$$\text{c) } P(\text{vinst}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 7.5 \cdot 10^{-6}$$

$$5324. \text{ a) } 10^4 = 10\,000 \text{ olika, från } 0000 \text{ till } 9999.$$

$$\text{b) } \frac{1}{10000} = 0.1 \text{ promille}$$

5332. Ett prov är dop-positivt med $P(\text{dopad}) = 0.015$. Om man blandar 5 prov innehåller blandningen dop-preparat om 1, 2, 3, 4 eller alla 5 testerna är dopade. Sannolikheten för detta är:

$$1 - P(\text{inget av de 5 testerna innehåller doping}) = 1 - (1 - P(\text{dopad}))^5 \approx 0.073$$

5333. Oberoende händelsers sannolikheter multipliceras:

$$P(A \text{ och } B \text{ och } C) = \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$$

5413. Inkomst $60\,000 \cdot 20 = 1\,200\,000$ kr, vinster $0.003 \cdot 60\,000 = 180$ st. Kostnad för vinster 900 000 kr, föreningen tjänar 300 000 kr om de säljer alla lotter.

$$5414. x \cdot 0.85 = 340 \Rightarrow x = \frac{340}{0.85} = 400 \text{ kast}$$

5415.

75 % engelska	20 % båda	
	35 % tyska	

a) 15 %

b) 10 %

5712. a) summan måste vara 60. T.ex.: 2 10 15 16 17

b) Summan är 60 och 15 är med: 1 2 15 16 26

5713. T.ex. 4.5 kg 7 kg 9.5 kg

5714. a) Före var total lönekostnad: $15 \cdot 15\,800 = 237\,000$ kr, total lönekostnad efter nyanställning: $17 \cdot 16\,000 = 272\,000$. Skillnad 35 000 kr. Den ena nyanställde fick kanske 15 000 kr/månad och den andra 20 000 kr/månad.

b) Lönen i mitten (medianlönen) förblir densamma då det tillkommit en ovanför och en under.

5715.

$$\begin{cases} \frac{A+B+C}{3} = 22 \\ B = A+1 \\ A = 0.8 \cdot C \end{cases} \Rightarrow A + A + 1 + 1.25A = 66 \Rightarrow \begin{cases} A = 20 \\ B = 21 \\ C = 25 \end{cases}$$

Svar: B är 21 år.

Test 5

1. 5 gafflar, 3 skedar, 6 knivar = 14 bestick

a) $\frac{5}{14} \approx 36\%$

b) $\frac{5+6}{14} = \frac{11}{14} \approx 79\%$

c) $\frac{3}{14} \cdot \frac{2}{13} = \frac{6}{183} \approx 3\%$

d) $2 \left(\frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} \right) = \frac{60}{183} = \frac{20}{183} \approx 33\%$

2. a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{2}$, utfallen är KrKr, KrKl, KlKr och KlKl.

3. Tabell över utfall summan av två tärningar:

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

$$P_8 = \frac{5}{36} \approx 14 \%$$

4. Ställ talen i storleksordning: 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 7

a) Median = $\frac{3+5}{2} = 4$

b) Vanligast är 5 = typvärde.

c) Största minus minsta dvs $7 - 2 = 5$

5. Till exempel 70, 75 och 80 kg.

6. a) $\frac{435}{1000} = 43.5 \%$

b) $1 - \frac{376}{1000} \approx 62 \%$

7. Det vanligaste utfallet vid kast med 2 tärningar är 7.

7 kan bildas av $1 + 6, 2 + 5, 3 + 4, 4 + 3, 5 + 2$ och av $6 + 1$.

8. Först väljs en, sedan finns 4 kvar av det könet bland de 9 återstående dvs $\frac{4}{9}$.

9. $\frac{150}{6} = 25$ gånger.

10. a) $400 \cdot 0.7 = 280$ mål.

b) $0.3^4 = 0.81 \%$

c) $1 - 0.3^4 \approx 99 \%$

11. 12 män, $\bar{x} = 25$ år, 13 kvinnor, $\bar{y} = 20$ år.

a) $(12 \cdot 25 + 13 \cdot 20) \frac{1}{25} = 22.4$ år

b) $(12 \cdot 25 + 13 \cdot 20 + 39) \frac{1}{26} \approx 23.0$ år

12. a)

Vikt (g)	f	Rel f
100-120	1	4.5
120-140	3	14
140-160	15	68
160-180	1	4.5
180-200	2	9.1

b) cirka 14 %

13. Se uppgift 3 ovan. $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 17 \%$

14. a) $\frac{54}{360} \cdot 100 \approx 15 \%$

b) $15 \% = 120 \text{ röster} \Rightarrow \text{varje } \% \text{ är } 8 \text{ röster} \Rightarrow 800 \text{ röstande}$

c) $(360 - 63 - 54) \cdot \frac{1}{360} \cdot 800 = 540 \text{ röster}$

15. a) 65 % flickor, 35 % pojkar: $0.35^3 \approx 4.3 \%$

b) Komplementhändelse till att pojkarna vinner alla tröjor, dvs $100 - 4.3 \% \approx 96 \%$

16. a) $(1 - P_A)(1 - P_B)(1 - P_C) \approx 0.949 = 95 \%$

b) "Minst en hel" är komplementhändelse till "alla trasiga" dvs:

$$1 - P_{\text{alla trasiga}} = 1 - P_A P_B P_C = 1 - 0.012 \cdot 0.023 \cdot 0.017 \approx 0.9999953$$

17. Låt pojke representeras av "0" och flicka av "1".

		a)	b)
0	0000		
1	0001	X	
2	0010	X	
3	0011		Y
4	0100	X	
5	0101		Y
6	0110		Y
7	0111		
8	1000	X	
9	1001		Y
10	1010		Y
11	1011		
12	1100		Y
13	1101		
14	1110		
15	1111		

a) $\frac{4}{16} \cdot 16\,000 = 4\,000$ familjer

b) $\frac{6}{16} \cdot 16\,000 = 6\,000$ familjer

Blandade uppgifter i kapitel 5

1. $P_5 + P_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

2. $P_A + P_B + P_C = 1 \Rightarrow P_C = 1 - P_A - P_B = 1 - \frac{2}{7} - \frac{4}{7} = \frac{1}{7}$

3. Se Test 5, uppgift 3: $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

4. a) $\frac{1}{10} = 0.1 = 10\%$

b) $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0.2 = 20\%$

c) $\frac{6}{10} = 0.6 = 60\%$

d) Orimligt alternativ, $P(\text{utfall} > 11) = 0$

5. a)

$$P(\text{gul kula}) = \frac{6}{10} = 0.6 = 60\%$$

b)

$$P(\text{två röda}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15} \approx 0.13 = 13\%$$

c)

$$P(\text{en gul och en röd}) = 2 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{15}$$

d)

$$P(\text{tre röda}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$$

6. Ordna talen i storleksordning: 13.7, 13.9, 14.6, 17.0

$$\bar{x} = \frac{13.7 + 13.9 + 14.6 + 17.0}{4} = 14.8$$

$$\text{Variationsbredd} = 17.0 - 13.7 = 3.3$$

7. Ordna talen i storleksordning.

a) 149, 158, 166, 172, 225 $\Rightarrow$ medianen är 166.

b) 135, 149, 158, 166, 172, 225 $\Rightarrow$ medianen är $\frac{166+158}{2} = 162$.

8. a) 2 personer

b) 3 personer har lånat 5 böcker

c) $4 + 8 + 2 + 2 + 3 = 19$ personer

d) $\frac{8}{19} \approx 42 \%$, ja, det stämmer.

9. $P(2 \text{ på gröna}) \cdot P(2 \text{ på blå}) \cdot P(2 \text{ på röda}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{128} \approx 0.8 \%$

10. $P(\text{en av 15}) \cdot P(\text{en av 12}) = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{180} \approx 0.56 \%$

11. $P(\text{sexa})^4 = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296} \approx 0.08 \%$

12. a) $26 + 15 + 9 + 6 + 4 = 60$ st

c) $P(< 12 \text{ s}) = P(10 \text{ s}) + P(11 \text{ s}) = \frac{26}{60} + \frac{15}{60} = \frac{41}{60} \approx 68 \%$

13. a) $0.15 \cdot 360^\circ = 54^\circ$

b) $0.8 \cdot 360^\circ = 288^\circ$

c) $\frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ$

d) $\frac{1}{5} \cdot 360^\circ = 72^\circ$

14. a) total vikt = $6 \cdot 69 = 414$ kg

b) ny medelvikt = $\frac{414-87+51}{6} = 63$ kg

15. $P(\text{ljus 1 rött}) = \frac{68}{34+68} = \frac{2}{3} \Rightarrow P(\text{ljus 1 grönt}) = \frac{1}{3}$

$P(\text{ljus 2 rött}) = \frac{78}{32+78} = \frac{39}{55} \Rightarrow P(\text{ljus 2 grönt}) = \frac{16}{55}$

a) $P(\text{ljus 1 rött}) = \frac{68}{34+68} = \frac{2}{3} \approx 67 \%$

b) $P(\text{ljus 1 rött}) \cdot P(\text{ljus 2 rött}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{39}{55} = \frac{78}{165} \approx 47 \%$

16. a) $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 48 \%$

b) $P(\text{nit nit nit}) = P(\text{nit})^3 = 0.8^3 = 0.512 \approx 51 \%$

c) $P(\geq \text{en vinst}) = 1 - P(4 \text{ nit}) = 1 - P(\text{nit})^4 = 1 - 0.8^4 \approx 59 \%$

d) $P(1 \text{ eller } 2 \text{ sexor}) = \frac{10}{36} + \frac{1}{36} = \frac{11}{36} \approx 31 \%$

18. a) Det finns $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ möjliga utfall, ett gynnsamt $\Rightarrow P(6 \ 6 \ 6) = \frac{1}{216} \approx 0.5 \%$

b) Det finns 216 möjliga utfall, 6 gynnsamma $\Rightarrow P(a \ a \ a) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36} \approx 2.8 \%$

19. a) $P(\text{nej}) = 0.5 = 180^\circ$, $P(\text{ja}) = 126^\circ = \frac{126}{360} = 0.35 \Rightarrow$
 $\Rightarrow P(\text{vet ej}) = 1 - 0.5 - 0.35 = 0.15 \Rightarrow \frac{19\ 000}{0.15} \approx 127\ 000 \text{ st}$

b) 15 procentenheter eller 43 % flera röster för nej.

20. a) $P(\text{pojke uppnår 80}) = \frac{46\ 383 + 11\ 342 + 338}{100\ 000} \approx 58 \%$

Svaret i facit räknar med att pojken uppnår 80 år men inte 90 år.

b) $P(\text{flicka uppnår 80}) = \frac{65\ 257 + 25\ 160 + 1\ 519}{100\ 000} \approx 92 \%$

Svaret i facit räknar med att flickan uppnår 80 år men inte 90 år.

c) $P(60 \text{ årig man blir 80}) = \frac{46\ 383 + 11\ 342 + 338}{89\ 454} \approx 65 \%$

Samma kommentar som i a) och b)

d) $P(80 \text{ årig kvinna blir 100}) = \frac{1\ 519}{65\ 257} \approx 2.3 \%$

e) $P(\text{pojke uppnår 100 år}) = \frac{338}{100\ 000} > \left(\frac{1}{6}\right)^4$ cirka 4 gånger större chans att bli 100 år.

21. a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{13}$

c) $\frac{1}{52}$

d) 0

e) $4 \cdot \frac{\text{antal färghänder}}{\text{totalt antal händer}} = 4 \cdot \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = 4 \cdot \frac{\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 4 \cdot \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{11 \cdot 9}{51 \cdot 20 \cdot 49} = 1.98 \cdot 10^{-3}$

f) Ett kort av 48 möjliga dvs $P(\text{hjärter } 4) = \frac{1}{48}$

22.

$$\frac{24 \cdot n + 41}{n + 1} = 25 \Rightarrow 24n + 41 = 25n + 25 \Rightarrow n = 16$$

Nu 17 medlemmar.

23. Då det skall vara olika smaker kan man välja 7, 6 eller 5 sätt de tre kulorna. Men då ordningen inte spelar någon roll dividerar man med 3! Dvs:

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

24.

$$1 - \frac{2}{7} - \frac{1}{8} = \frac{56 - 16 - 7}{56} = \frac{33}{56}$$

Facit verkar glömt $P(B)$.

$$25. 1 - P(\text{ingen sexa på 9 kast}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^9 \approx 81 \%$$

$$26. \frac{1}{24} + \frac{1}{23} + \frac{1}{22} \approx 13.1 \%$$

$$27. P(\text{varken } A \text{ eller } B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(\text{både } A \text{ och } B)) = 1 - 0.7 = 0.3$$

28. Ställ upp ett ekvationssystem:

$$\begin{cases} A = B + 5 \\ C = 2A \\ \frac{A + B + C}{3} = 201 \end{cases} \Rightarrow A + A - 5 + 2A = 603 \Rightarrow \begin{cases} A = 152 \\ B = 147 \\ C = 304 \end{cases}$$

29. Ställ upp ett ekvationssystem:

$$\begin{cases} B = 1.4A \\ C = 0.6B \\ D = 21\,840 \\ A + B = C + D \end{cases} \Rightarrow \frac{B}{1.4} + B = 0.6B + 21\,840 \Rightarrow \begin{cases} B = 19\,600 \\ C = 11\,760 \\ D = 21\,840 \\ A = 14\,000 \end{cases}$$

a)

$$\bar{x} = \frac{11\,760 + 14\,000 + 19\,600 + 21\,840}{4} = 16\,800 \text{ kr}$$

b) 16 800 kr

c) 10 080 kr

(Troligen fel i facit.)

30. De har spelat 9 set där A har vunnit 5 och B vunnit 4.

Då spelet styrs av slumpen så är $P(\text{vinst för } A \text{ eller } B) = 0.5$. Då blir chansen att B vinner två gånger (dvs allt) $0.5^2 = 0.25$ och $P(A \text{ vinner allt}) = 1 - P(B \text{ vinner allt}) = 0.75$. Detta ger ett sätt att fördela vinsten.

31. Halva rektangelns area är grön, alltså är det 50 % för 10 p varje kast dvs

		poäng
0	0000	0
1	0001	10
2	0010	10
3	0011	20
4	0100	10
5	0101	20
6	0110	20
7	0111	30
8	1000	10
9	1001	20
10	1010	20
11	1011	30
12	1100	20
13	1101	30
14	1110	30
15	1111	40

$$P(\text{poäng} \geq 30) = \frac{5}{16}$$

Bonusmaterial från en annan kurs, matematik 3c.

saxen

$$Sax(a \text{ till } b) = \frac{1}{2} \left(\frac{x-a}{|x-a|} - \frac{x-b}{|x-b|} \right)$$

Födelsedatumrebusen: Antag att jag är född a/b då gäller:

$$(a \cdot 3 + 5) \cdot 4 + a + b - 20 = 12a + 20 + a + b - 20 = 13a + b$$

Svårt att säga emot att svaret blir a och rest b om man delar med 13, till exempel.

Matte 3c 1510.

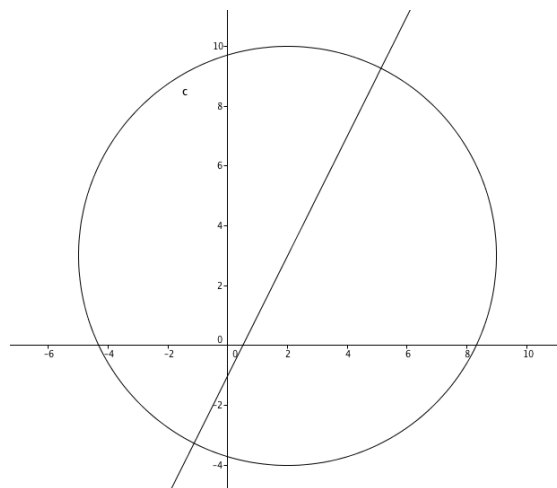
$$49 = (x-2)^2 + (y-3)^2, y = 2x - 1$$

$$49 = (x-2)^2 + (2x-1-3)^2 = (x-2)^2 + (2x-4)^2$$

$$49 = x^2 - 4x + 4 + 4x^2 - 16x + 16 = 5x^2 - 20x + 20$$

$$5x^2 - 20x + 20 - 49 = 0, x^2 - 4x - \frac{29}{5} = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4 + \frac{29}{5}} = 2 \pm \frac{7}{\sqrt{5}} \approx \begin{cases} 5.1 \\ -1.1 \end{cases}$$



Ma3c 2341. a)

$$f(x) = \frac{x}{3} + \frac{b}{2} = \frac{2x}{2 \cdot 3} + \frac{3b}{3 \cdot 2} = \frac{2x + 3b}{6}$$

$$g(x) = \frac{2x}{3} + b = \frac{2x}{3} + \frac{3b}{3} = \frac{2x + 3b}{3}$$

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)} = \frac{2x + 3b}{6} \cdot \frac{3}{2x + 3b} = \frac{1}{2}$$